Dr. J. Giannoulis , M.Sc. S. Metzler, Dipl. Math. K. Tichmann

Aufgabe 1 Begründen Sie *kurz*, warum

$$\frac{x}{\sin x}$$

in $x = 0$ analytisch ist. Leiten Sie danach unter Ausnutzung der Formel

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ,$$

die Potenzreihe her und geben Sie den Konvergenzradius an.

Lösung

Mit der Potenzreihe des Sinus folgt

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \qquad \text{und (nochmal)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad .$$

Also ist $\frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$ analytisch mit 0-tem Koeffizient von Null verschieden. Damit und einem Satz der Vorlesung ist auch der Kehrwert in $x = 0$ analytisch.

Zum Spaß prüfen wir die Korrektheit der angegebenen Formel:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin x} &= \frac{x}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \frac{x(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad . \end{aligned}$$

In der Vorlesung waren folgende Potenzreihen dran:

$$\frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \quad , \quad |x| < 2\pi$$

$$\frac{x}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(4^k-1)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \quad , \quad |x| < \pi \quad ,$$

also

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(4^k-2)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k} \quad , \quad |x| < \pi \quad .$$

Anmerkung die Kotangensreihe, die auch in der Vorlesung dran war,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4^k B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1} \quad , \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \quad ,$$

ist keine Potenzreihe, denn sie hat eine Singularität im "Konvergenzkreis", sondern eine Laurentreihe mit einem Konvergenzring.

Aufgabe 2 Begründen Sie *kurz*, warum der Sekans

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

in $x = 0$ analytisch ist. Die zugehörige Potenzreihe

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

definiert die Euler'schen Zahlen E_{2k}. Geben Sie eine Rekursionsformel für die Zahlen E_{2k} an und berechnen Sie daraus die Werte $E_0, E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}$. Äußern Sie Vermutungen über die Eigenschaften der Folge E_{2k} , $k \in \mathbb{N}$.

Lösung

Mit der Potenzreihe des Kosinus folgt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{und} \qquad \cos 0 = 1 \quad .$$

Also ist $\cos x$ in $x = 0$ analytisch mit 0-tem Koeffizient von Null verschieden. Damit und einem Satz der Vorlesung ist auch der Kehrwert in $x = 0$ analytisch.

Zur Bestimmung der Rekursionsformel setzen wir an:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos x \sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \\ & \quad \text{mit Cauchyprodukt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(-1)^{n-k} E_{2(n-k)}}{(2(n-k))!} x^{2(n-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n E_{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!} x^{2n} \quad . \end{aligned}$$

Nennen wir die Koeffizienten der Produktreihe c_{2n}, so folgt weiter:

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 = E_0 \quad , \\ 0 &= c_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n E_{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!} \quad n > 0 \quad , \end{aligned}$$

und damit die Rekursion:

$$\begin{aligned} E_0 &= 1 \quad , \\ E_{2n} &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} E_{2n-2k} = -\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2n-2k} \quad , \end{aligned}$$

welche die Werte

$$E_0 = 1 \quad , \quad E_2 = -1 \quad , \quad E_4 = 5 \quad , \quad E_6 = -61 \quad , \quad E_8 = 1385 \quad , \quad E_{10} = -50521 \quad ,$$

liefert. Wir vermuten, dass die Folge alterniert und betragsmäßig sehr schnell wächst.

Aufgabe 3 Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie jeweils reelle Ausdrücke für die folgenden Real- und Imaginärteile:

$$\Re(e^z) \quad , \quad \Im(e^z) \quad , \quad \Re(\sin z) \quad , \quad \Im(\sin z) \quad , \quad \Re(\cos z) \quad , \quad \Im(\cos z) \quad .$$

b) Berechnen Sie $e^{\pi i/2}$, $e^{\pi i}$ und $e^{2\pi i}$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = \Re\{e^z\} + i\Im\{e^z\} \\
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) \\
&= \frac{-i}{2}(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos x + ie^{y}\sin x) \\
&= -i(-\sinh y \cos x + i\cosh y \sin x) \\
&= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x = \Re\{\sin z\} + i\Im\{\sin z\} \\
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x + e^{y}\cos x - ie^{y}\sin x) \\
&= (\cosh y \cos x - i\sinh y \sin x) = \Re\{\cos z\} + i\Im\{\cos z\}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\pi i}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\
e^{\pi i} &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
e^{2\pi i} &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Bestätigen Sie die Identität

$$\arctan x = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right) \quad ,$$

durch Vergleich der Potenzreihen.

Lösung

Wir erzeugen die Potenzreihe vom Arkustangens analog zu Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad ,
\end{aligned}$$

und der Konvergenzradius ist folglich 1.
Für den Logarithmus war in der Vorlesung folgende Potenzreihe dran

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad ,$$

mit Konvergenzradius 1.

Damit entwickeln wir die rechte Seite (um mal einen anderen Weg zu gehen)

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right) &= \frac{i}{2}(\ln(1-ix)-\ln(1+ix)) \\
&= \frac{i}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-ix)^{k+1}}{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(ix)^{k+1}}{k+1}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^{k+1}(ix)^{k+1}-(ix)^{k+1}}{k+1}\right) \\
&\ \text{die Ungeraden heben sich weg} \\
&= \frac{i}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)(ix)^{2k+1}-(ix)^{2k+1}}{2k+1}\right) = \frac{i}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2i^{2k+1}\,x^{2k+1}}{2k+1}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2i(i^2)^k\,x^{2k+1}}{2k+1}\right) = \frac{-2i^2}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}
$$