Dr. J. Giannoulis , M.Sc. S. Metzler, Dipl. Math. K. Tichmann WS 2010/11

Aufgabe 1 (Herleitung elementarer Rechenregeln)
Folgern Sie aus der axiomatischen Charakterisierung von $\mathbb{R}$ als eines angeordneten Körpers (der die Supremumseigenschaft besitzt) die folgenden Eigenschaften. Hierbei gilt $x, y, z \in \mathbb{R}$ und 0 bzw. $1(\neq 0)$ sind die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation.

1. $x < y, y < z \;\Rightarrow\; x < z$
2. $x + y = x + z \;\Rightarrow\; y = z$
3. $(-1)x = -x$
4. $-(-x) = x$
5. $x \neq 0,\; xy = xz \;\Rightarrow\; y = z$
6. $x \neq 0,\; \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
7. $0x = 0$
8. $x \neq 0,\; y \neq 0 \;\Rightarrow\; xy \neq 0$
9. $x \neq 0,\; y \neq 0 \;\Rightarrow\; (-x)y = -(xy) = x(-y)$
10. $(-x)(-y) = xy$
11. $x > 0,\; y < z \;\Rightarrow\; xy < xz$
12. $x < 0,\; y < z \;\Rightarrow\; xy > xz$
13. $0 < x < y \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
14. $x \neq 0 \;\Rightarrow x^2 > 0$
(und damit insbesondere $1 > 0$)

Lösung

1. $x < y$ und $y < z$ impliziert $y - x > 0$ und $z - y > 0$ und somit $z - x = z - y + y - x > 0$ also gilt $z > x$.

2. $y = 0 + y = (x - x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$.

3. Wir müssen als erstes zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $0x = 0$. Dies folgt aus $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$ und mit 2. folgt $0x = 0$.
Nun gilt $(-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = 0$ also ist $(-1)x$ das eindeutig additiv Inverse zu x, nämlich $-x$.

4. Mit 3. gilt $-(-x) + -x = (-1)(-x) + (-1)x = (-1)(-x + x) = (-1)0 = 0$. Somit ist -(-x) das eindeutig additiv Inverse zu $-x$, also gilt $-(-x) = x$.

5. $y = 1y = (\frac{1}{x}x)y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(xz) = (\frac{1}{x}x)z = 1z = z$

6. $\frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x} = 1$. Also ist $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ das eindeutig multiplikativ Inverse Element zu $\frac{1}{x}$. Also gilt $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

7. Siehe 3.

8. Angenommen es wäre $xy = 0$. Dann folgt aus 7. $1 = \frac{1}{x}\frac{1}{y}xy = \frac{1}{x}\frac{1}{y}0 = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu den Körperaxiomen.

9. Dies gilt offensichtlich auch für $x = y = 0$. Es gilt $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$. Also ist $(-x)y = -xy$. Durch Vertauschen der Rollen von x und y erhält man die zweite Gleichung.

10. Mit 9. und 4. gilt : $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy$.

11. Da $z > y$ gilt $z - y > y - y = 0$ also ist $x(z-y) > 0$ und somit $xz = x(z-y) + xy > 0 + xy = xy$.

12. $-(x(z-y)) = (-x)(z-y) > 0$ also ist $x(z-y) < 0$ und somit $xz < xy$.

13. Vorausgesetzt $1 > 0$ (siehe 14.). Wenn $y > 0$ und $v \leq 0$ dann ist auch $vy \leq 0$. Aber $y\frac{1}{y} = 1 > 0$ Also ist auch $\frac{1}{y} > 0$. Analog ist auch $\frac{1}{x} > 0$. Multiplizieren wir nun beide Seiten der Gleichung $x < y$ mit der positiven Zahl $\frac{1}{x}\frac{1}{y}$, erhalten wir $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.

14. Für $x > 0$ gilt nach Definition $x^2 > 0$. Für $x < 0$ gilt $-x > 0$ und somit $0 < (-x)^2 = -(-(x^2)) = x^2$. Insbesondere gilt hiermit $1 = 1^2 > 0$

Aufgabe 2 (n-te Wurzel)
a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und jedes $n \in \mathbb{N}$ es höchstens ein $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, gibt, so dass $y^n := \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ Faktoren}} = x$.
b) Sei $E := \{t \in \mathbb{R} : \ t > 0, \ t^n < x\}$. Zeigen Sie, dass $\sup E$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie $s \in \mathbb{R}$ mit $s = x/(1+x)$ oder $s > 1 + x$.

Lösung
a) Nehmen wir an es gäbe 2 verschiedene $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, so dass $y_1^n := \underbrace{y_1 \cdot \ldots \cdot y_1}_{n \text{ Faktoren}} = x$. und $y_2^n := \underbrace{y_2 \cdot \ldots \cdot y_2}_{n \text{ Faktoren}} = x$. Da $\mathbb{R}$ ein total geordneter Körper ist, gilt dann OE $y_1 < y_2$ und mit Induktion und $y_1^2 < y_1 y_2 < y_2^2$ gilt dann auch $y_1^n < y_2^n$. Ein Widerspruch zu $y_1^n = x = y_2^n$.

b) Um zu zeigen, dass $\sup E$ existiert, ist zu zeigen, dass E eine nicht leere und beschränkte Menge ist. Für $s = x/(1+x)$ gilt $0 < s < 1$ und somit $s^n < s < x$. Also ist $s \in E$ und E ist nicht leer. Für $s > 1 + x$ gilt $s^n > s > x$, so dass $s \notin E$. Also ist $1 + x$ eine obere Schranke für E. Hiermit existiert $\sup E$.

Aufgabe 3 ($\mathbb{Q}$ erfüllt nicht die Supremumseigenschaft)
Gegeben seien die Mengen

$$A := \left\{p \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) : p^2 < 2\right\}$$

$$B := \left\{p \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) : p^2 > 2\right\}.$$

Zeigen Sie:

1. B besteht aus oberen Schranken von A.
2. B besitzt kein kleinstes Element.

Hinweis: Betrachten Sie die einer Zahl $p \in B$ zugeordneten Zahlen $q = p - \frac{p^2-2}{2p}$ und $q^2 - 2$.

Lösung
1. Angenommen es gibt ein $p \in B$ und ein $q \in A$, so dass $p < q$, dann folgt

$$p^2 < pq < q^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $q^2 < 2 < p^2$.

2. Wir wollen zeigen, dass für jedes jedes $p \in B$ ein rationales $q \in B$ existiert, so dass $q < p$. Nehmen wir ein $p \in B$. Dann gilt $p^2 > 2$. Setze

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}.$$

Dann ist $0 < q < p$ und

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + (\frac{p^2 - 2}{2p})^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2.$$

Also ist dieses q auch in B.

Aufgabe 4 (Infimum)
Definieren Sie das Infimum $\inf M$ einer nichtleeren, nach unten beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ und geben Sie dessen Eigenschaften in Analogie zum Supremumsbegriff an.

Lösung

Sei M nichtleer und nach unten beschränkt, dann definieren wir

1. das Infimum ist untere Schranke

$$a \in M \qquad \Rightarrow \qquad \inf M \leq a$$

2. das Infimum ist größte untere Schranke.

$$s_u \leq \inf M \qquad \text{für alle unteren Schranken } s_u$$

Falls $M = \emptyset$ setze man $\inf M = \infty$ und falls $M \neq \emptyset$, aber nach unten unbeschränkt setze man $\inf M = -\infty$.
Rechenregeln: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ mit $\inf X, \inf Y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten

(i) $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$

(ii) $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \inf(\lambda X) = \lambda \inf X$

(iii) $X, Y \subset [0, \infty) \quad \Rightarrow \quad \inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y$

(iv) $X \subset Y \quad \Rightarrow \quad \inf X \geq \inf Y$