ANALYSIS FÜR INFORMATIKER
ÜBUNGSBLATT WEIHNACHTSGESCHENK

Dr. J. Giannoulis , M.Sc. S. Metzler, Dipl. Math. K. Tichmann WS 2010/11

Trainingseinheit 0 (Skript) „Kartieren“ Sie grob die Inhalte des Skripts. Welche Werkzeuge, Begriffe, Methoden finden sich wo? Halten Sie das Skript stets griffbereit.

Trainingseinheit 1 (Konvergenz von Reihen)

(a) Welche Kriterien kennen Sie für den Nachweis, dass eine Reihe konvergiert?

(b) Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$$

Wenn Sie zuvor (a) genau durchgegangen sind, sollte Ihnen ein bestens geeignetes Kriterium „ins Auge springen“.

(c) Kennen Sie evtl. für ein spezielles $s \in \mathbb{R}$ bereits den Wert von $\beta(s)$?

(d) Geben Sie im konvergenten Fall eine einfache Einschließung von $\beta(s)$ an.

(e) Können Sie den Weg zu dieser Einschließung so modifizieren, dass Sie die Stetigkeit von $\beta(s)$ kurz begründen können? (Für welche s? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem, was der allgemeine Satz aus §6.4 hergibt.)

(f) Bestimmen Sie den Grenzwert $c = \lim\limits_{s\to\infty} \beta(s)$.

(g) Der letzte Punkt lässt sich in der Form $\beta(s) = c + o(1)$ für $s \to \infty$ schreiben. (Warum eigentlich?) Präzisieren Sie den $o(1)$-Term, indem Sie das Fragezeichen in der folgenden asymptotischen Formel ausfüllen:

$$\beta(s) = c + O(?) \qquad (s \to \infty).$$

Trainingseinheit 2 (Kurvendiskussion und Minima)

(a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ für $x > 0$. Wo liegen die Maxima/Minima, wo wächst bzw. fällt die Funktion monoton, wo ist sie konvex, wo konkav?

(b) Bestimmen Sie die bestmögliche Konstante $c \geq 0$, so dass für $x, y, z > 0$ mit $x + y + z = 1$ gilt

$$c \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

In welchem Fall gilt die Gleichheit?

Hinweis. Warum beginnt diese Trainingseinheit wohl mit (a)? Welches Werkzeug sollte Ihnen da im Zusammenhang mit Ungleichungen einfallen?

Trainingseinheit 3 (Kurvendiskussion und Summenabschätzung)

(a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^{-1} \cdot \ln x$ für $x > 0$. Wo liegen die Maxima/Minima, wo wächst bzw. fällt die Funktion monoton, wo ist sie konvex, wo konkav?

(b) Betrachten Sie die Folge

$$\tau_n = 1^{1/1} \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdots n^{1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Geben Sie mit Hilfe der Integration eine einfache Einschließung von $\ln \tau_n$ an. Warum sind hierfür die Kenntnisse aus (a) wichtig?

(c) Füllen Sie das Fragezeichen in folgender asymptotischen Entwicklung:

$$\ln \tau_n = ? + O(1) \qquad (n \to \infty).$$

Trainingseinheit 3b (Kurvendiskussion) Drücken Sie die Differenz

$$f(b) - f(a)$$

durch die Ableitung f' der Funktion aus. Verwenden Sie dazu den Hauptsatz und die Mittelwertsäze und vergleichen Sie Voraussetzungen und Ergebnisse.

Trainingseinheit 4 (Nullstellen von Polynomen) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ Nullstelle des nichtkonstanten Polynoms $p \in \mathbb{R}[x]$ ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$p(x) = (x - x_0)^n q(x), \qquad q(x_0) \neq 0,$$

wobei $q \in \mathbb{R}[x]$; n heißt dann die *Vielfachheit* der Nullstelle.

(a) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Werten $q(x_0)$ und $p^{(n)}(x_0)$ her, indem Sie sich beispielsweise überlegen, wie Sie

$$q(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x - x_0)^n}$$

auswerten könnten. (Geben Sie auch eine ganz kurze Begründung, warum diese Gleichung für $q(x_0)$ überhaupt gilt.) Kommt Ihnen das nicht bekannt vor? Halt: Schauen Sie nicht nur in ß7.2 nach, sondern vor allen in ß10.1. Sehen Sie den Zusammenhang jetzt „auf einen Blick“?

(b) Berechnen Sie die Werte $p'(x_0), p''(x_0), \ldots, p^{(n-1)}(x_0)$. (Wer hier viel rechnet, hat in (a) nicht gründlich nachgedacht.)

Trainingseinheit 5 (Genauigkeiten)

(a) Schätzen Sie ab, wie groß n gewählt werden muss, damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$$

auf m Dezimalziffern korrekt ist. Drücken Sie n asymptotisch als möglichst einfache Funktion von m aus.

(b) Wiederholen Sie die Überlegungen aus (a) für

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \approx e.$$

(c) Finden Sie eine einfache rationale Approximation von $\sin(1)$ und geben Sie auch hier den asymptotischen Zusammenhang zwischen Aufwand und Anzahl der korrekten Dezimalziffern an.

Trainingseinheit 6 (Ungleichungen und Asymptotik)

(a) Zeigen Sie für die absteigende Faktorielle

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

die folgende Einschließung:

$$n^k\left(1-\binom{k}{2}\cdot n^{-1}\right) \;\le\; n^{\underline{k}} \;\le\; n^k \exp\left(-\binom{k}{2}\cdot n^{-1}\right).$$

In welchem Sinne ist die untere Abschätzung in der oberen als „erste Näherung enthalten"? (Bei „erster Näherung" sollte Ihnen die Taylor-Entwicklung einfallen.)

(b) Erklären Sie genau, wie man aus (a) die folgende Asymptotik erhält:

$$n^{\underline{k}} = n^k\left(1-\binom{k}{2}\cdot n^{-1} + O(k^4\cdot n^{-2})\right) \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Dabei bedeutet

$$g(k,n) = O(k^4\cdot n^{-2}) \qquad (n,k \in \mathbb{N}),$$

dass es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$|g(k,n)| \le c\,k^4\cdot n^{-2} \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

(c) Wie sehen die entsprechenden Ergebnisse (Einschließung und Asymptotik) für die aufsteigende Faktorielle

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1) \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

aus?

Trainingseinheit 7 (Anwendungen des Integrals)

a) Leiten Sie durch vollständige Induktion und partielle Integration die Formel

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})\cdot\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}$$

(im Buch von Herrn Bornemann Formel 9.19) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ her, wobei

$$I_n(x) := \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)\cos^n(t)dt$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Folgern Sie aus a) durch logarithmisches Differenzieren

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}) + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}$$

für $x \notin \mathbb{Z}$.

Lösung Trainingseinheit 1.

a) Bekannte Kriterien sind das Majoranten-, Wurzel-, Quotienten- , Leibnizkriterium und der Integralvergleich.

b) Die Reihe $\beta(s)$ ist aufgrund ihrer Konstrukiton eine Leibnizreihe und konvergiert genau dann falls $(2k+1)^{-s} \to 0$ für $k \to \infty$. Somit ist $\beta(s)$ für $s > 0$ konvergent und für $s \leq 0$ divergent.
Im Fall $s > 1$ ist die Riemannsche ζ-Funktion eine Majorante für β. Somit ist $\beta(s)$ für $s > 1$ sogar absolut konvergent.

c) Für $s = 1$ erkennen wir mit $\beta(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ die Leibniz'sche Reihe.

d) Da $\beta(s)$ eine Leibnizreihe ist folgt daraus sofort die Einschließung

$$\beta_1(s) \leq \beta_3(s) \leq \cdots \leq \beta_{2n+1}(s) \leq \beta(s) \leq \beta_{2n}(s) \leq \cdots \leq \beta_2(s) \leq \beta_0(s),$$

wobei $\beta_n(s) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$ ist.

e) Für eine Folge $(s_k) > 0$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$ folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{2n+1}(s_k) = \beta_{2n+1}(s) \leq \lim_{k\to\infty} \beta(s_k) \leq \beta_{2n}(s) = \lim_{k\to\infty} \beta_{2n}(s_k)$$

Somit folgt die Stetigkeit von β mit

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1}(s) = \beta(s) \leq \lim_{k\to\infty} \beta(s_k) \leq \beta(s) = \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(s)$$

f) Wegen der Stetigkeit von β folgt nun

$$\lim_{s\to\infty} \beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{s\to\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} [k=0] = 1.$$

g) Der Ausdruck $\beta(s) = c + o(1)$ bedeutet ja

$$\frac{\beta(s) - c}{1} \to 0 \text{ für } s \to \infty.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $c = \lim\limits_{s\to\infty} \beta(s)$.
Die Asymptotik berechnet sich dann wie folgt

$$|\beta(s) - 1| = |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}| = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)^{-s} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-s} = 2^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} = 2^{-s}\zeta(s).$$

Mit $\zeta(s) = 1 + O(2^{-s})$ folgt nun für $s \to \infty$

$$\beta(s) = 1 + O(2^{-s}) + O(4^{-s}) = 1 + O(2^{-s})$$

Lösung Trainingseinheit 2.

a) Wir haben $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ und somit $f'(x) = -(x^2 + x)^{-1} < 0$ für $x > 0$. Weiter gilt $f''(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2} > 0$ für $x > 0$. Somit ist f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend und konvex.

b) Die Funktion $f(x) = \ln(x + \frac{1}{x})$ ist konvex und somit kann man die Jensensche Ungleichung anwenden. Wir wählen hierfür $p_k = 1/3$ für $k = 1, 2, 3$ und $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$. Die Ungleichung liefert nun

$$\ln 4 = \ln(1 + \frac{1}{1/3}) = f(1/3) = f((x + y + z)/3) \quad =$$

$$
\begin{aligned}
f(\sum_{k=1}^{3} p_k x_k) \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{3} p_k f(x_k) = \\
&\frac{1}{3}\left(\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln(1+\frac{1}{y}) + \ln(1+\frac{1}{z})\right)
\end{aligned}
$$

Da die exp-Funktion streng monoton wachsend ist, kann man diese auf die Ungleichung anwenden und erhält somit das gewünschte Ergebnis

$$
4^3 \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right),
$$

wobei Gleichheit für $x = y = z = 1/3$ gilt.

Lösung Trainingseinheit 3.

a) Wir haben $f(x) = x^{-1}\ln(x)$ und somit $f'(x) = x^{-2}(1-\ln(x))$. Weiter ist $f''(x) = x^{-3}(2\ln(x)-3)$.
Somit ist f streng monoton wachsend für $x \in (0,e)$ und streng monton fallend für $x \in (e,\infty)$. Weiter ist f streng konkav für $x \in (0,\sqrt{e^3})$ und streng konvex für $x \in (\sqrt{e^3},\infty)$.

b) Es ist $\ln \tau_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)/k$. Da für $x > e$ die Funktion f streng monoton fallend ist gilt

$$
\int_3^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_3^n f(x)\,dx + f(3) + f(n)
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\ln(1) + (\ln 2)/2 + \int_3^n x^{-1}\ln(x)\,dx &\leq \ln(\tau_n) \\
&\leq \int_3^n x^{-1}\ln(x)\,dx + (\ln 3)/3 + (\ln n)/n + \ln(1) + (\ln 2)/2
\end{aligned} \tag{1}
$$

c) Nun ist $\int_3^n x^{-1}\ln(x)\,dx = \left[(\ln x)^2/2\right]_3^n = (\ln n)^2/2 - (\ln 3)^2/2$, womit wir

$$
\ln(\tau_n) = \int_3^n x^{-1}\ln(x)\,dx + O(1) = (\ln n)^2/2 - (\ln 3)^2/2 + O(1) = (\ln n)^2/2 + O(1)
$$

erhalten.

Lösung Aufgabe 3b.
Mit den (eingeschränkten) Voraussetzungen, die in der Vorlesung gemacht wurden, liefert uns der Hauptsatz für stetig - differenzierbares f die erste Gleichheit in

$$
f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx = f'(\xi)(b-a) \quad ,
$$

und der Mittelwertsatz der Integralrechnung die zweite Gleichheit mit einem $\xi \in [a,b]$.
Ist f wenigstens differenzierbar, so liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$
f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)
$$

mit einem $\xi \in (a,b)$.

Lösung Trainingseinheit 4.

a) Jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p) = d$ lässt sich eindeutig bezüglich der Basis $\left((x-x_0)^k\right)_{k=0,\ldots,d}$ darstellen. Andererseits liefert die (endliche) Taylorreihe von p um den Entwicklungspunkt x_0 die Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=n}^{d} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = (x-x_0)^n \cdot \sum_{k=n}^{d} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-n},$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aufgrund der Vorraussetzung gilt, denn x_0 ist eine n-fache Nullstelle von p.

Aus der letzten Darstellung sieht man, dass $q(x) = \sum_{k=n}^{d} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-n}$ gilt und somit folgt

$$q(x_0) = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$$

b) Aus der obigen Darstellung von p liest man $p'(x_0) = p''(x_0) = \ldots = p^{(n-1)}(x_0) = 0$ ab.

Lösung Trainingseinheit 5.

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cdot (1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} - \frac{7}{16n^3}) + O(n^{-4}).$$

Wollen wir nun m Dezimalstellen berechnen, so müssen wir fordern, dass der Fehler kleiner ist als $10^{-(m+1)}$. Man muss also bis zu einem n mit

$$n^{-4} \leq 10^{-(m+1)} \Leftrightarrow n \geq 10^{(m+1)/4}$$

rechnen.

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$|1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - e| \leq \frac{2}{n!}$$

Wollen wir nun m Dezimalstellen von e mittels dieser Formel berechnen, so können abbrechen, sobald

$$\frac{2}{n!} \leq 10^{-(m+1)} \Leftrightarrow n! \geq 2 \cdot 10^{m+1}$$

Für $n > 30$ gilt $n! > 10^{n+1}$ und somit benötigt man asymptotisch für m Dezimalziffern höchstens m Reihenglider. Schätzt man $n!$ mit der Stirlingschen Formel ab, so kann die Schranke noch verbessert werden.

c) Analog wie für die exp-Funktion schätzt man für $\sin 1$ folgendermaßen ab:

$$|1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots \pm \frac{1}{(2n-1)!} - \sin 1| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$$

Diese Abschätzung folgt auch direkt aus der Einschließung von $\sin 1$ mittels der Partialsummen, da die zugehörige Reihe alternierend ist. Will man nun m Dezimalstellen von $\sin 1$ mittels dieser Formel berechnen, so kann man die Berechnung abbrechen sobald

$$\frac{1}{(2n+1)!} \leq 10^{-(m+1)} \Leftrightarrow (2n+1)! \geq \cdot 10^{m+1}$$

gilt. Wie oben kann man für $n > 15$ wieder folgern, dass $(2n+1)! > 10^{m+1}$ gilt. Somit benötigt man asymptotisch $m/2$ viele Reihenglieder um $\sin 1$ auf m Dezimalstellen genau auszurechnen.

Lösung Trainingseinheit 6.

a) Die Einschließung zeigen wir per Induktion über $k \in \mathbb{N}$:

IA: $k = 1$

$$n^1 \left(1 - \binom{1}{2} n^{-1}\right) \le n^1 \le n^1 \exp\left(-\binom{1}{2} n^{-1}\right)$$

IS: $k \to k+1$

$$\begin{aligned}
n^{\underline{k+1}} &= n^{\underline{k}} \cdot (n-k) \\
&\ge n^k \left(1 - \binom{k}{2} n^{-1}\right) \cdot (n-k) = n^{k+1}\left(1 - \binom{k}{2} n^{-1}\right) \cdot (1 - kn^{-1}) \\
&= n^{k+1}\left(1 - \left(\binom{k}{2} + k\right) n^{-1} + \binom{k}{2} kn^{-2}\right) \\
&\ge n^{k+1}\left(1 - \left(\binom{k}{2} + k\right) n^{-1}\right) = n^{k+1}\left(1 - \binom{k+1}{2} n^{-1}\right) \\
\text{mit} \quad \binom{k+1}{2} &= \frac{(k+1)k}{2} = \frac{(k-1)k + 2k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + k = \binom{k}{2} + k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^{\underline{k+1}} &= n^{\underline{k}} \cdot (n-k) \\
&\le n^k \exp\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right) \cdot (n-k) \\
&= n^{k+1} \exp\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right) \cdot (1 + (-kn^{-1})) \\
&\le n^{k+1} \exp\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right) \cdot \exp(-kn^{-1})) \\
&= n^{k+1} \exp\left(-\left(\binom{k}{2} + k\right) n^{-1}\right) \\
&= n^{k+1} \exp\left(-\binom{k+1}{2} n^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Die untere Schranke ist in der oberen enthalte, wie die exp-Reihe zeigt:

$$n^k \exp\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right) = n^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right)^j = n^k \left(1 - \binom{k}{2} n^{-1} \pm \cdots\right)$$

b) Ein Blick auf die exp-Reihe in a) zeigt, dass die exp-Reihe für das speziell gewählte Argument alterniert, somit liefert uns das Leibnizkriterium sofort eine Einschließung wie folgt

$$n^k \left(1 - \binom{k}{2} n^{-1}\right) \le n^{\underline{k}} \le n^k \exp\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right) \le n^k \left(1 - \binom{k}{2} n^{-1} + \frac{1}{2!}\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right)^2\right)$$

Mit

$$g(k,n) = \frac{1}{2!}\left(-\binom{k}{2} n^{-1}\right)^2 = \frac{1}{8}(k(k-1))^2 n^{-2} = O(k^4 n^{-2})$$

folgt

$$n^{\underline{k}} = n^k \left(1 - \binom{k}{2} n^{-1} + O(k^4 n^{-2})\right)$$

c) Wenn man die nachstehende Identität nutzt

$$n^{\overline{k}} = (n+k-1)^{\underline{k}} \quad ,$$

lassen sich die obigen Resultate wiederverwenden.

$$n^{n+k-1}\left(1-\binom{n+k-1}{2}n^{-1}\right)\leq n^{\bar{k}}\leq n^{n+k-1}\exp\left(-\binom{n+k-1}{2}n^{-1}\right)$$

$$n^{\bar{k}}=n^{n+k-1}\left(1-\binom{n+k-1}{2}n^{-1}+O((n+k-1)^4n^{-2})\right)$$

Lösung Trainingseinheit 7.
Siehe Anhang.