Dr. J. Giannoulis , M.Sc. S. Metzler, Dipl. Math. K. Tichmann WS 2010/11

Trainingseinheit 0 (Skript) „Kartieren“ Sie grob die Inhalte des Skripts. Welche Werkzeuge, Begriffe, Methoden finden sich wo? Halten Sie das Skript stets griffbereit.

Trainingseinheit 1 (Konvergenz von Reihen)

(a) Welche Kriterien kennen Sie für den Nachweis, dass eine Reihe konvergiert?

(b) Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$$

Wenn Sie zuvor (a) genau durchgegangen sind, sollte Ihnen ein bestens geeignetes Kriterium „ins Auge springen“.

(c) Kennen Sie evtl. für ein spezielles $s \in \mathbb{R}$ bereits den Wert von $\beta(s)$?

(d) Geben Sie im konvergenten Fall eine einfache Einschließung von $\beta(s)$ an.

(e) Können Sie den Weg zu dieser Einschließung so modifizieren, dass Sie die Stetigkeit von $\beta(s)$ kurz begründen können? (Für welche s? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem, was der allgemeine Satz aus §6.4 hergibt.)

(f) Bestimmen Sie den Grenzwert $c = \lim_{s\to\infty} \beta(s)$.

(g) Der letzte Punkt lässt sich in der Form $\beta(s) = c + o(1)$ für $s \to \infty$ schreiben. (Warum eigentlich?) Präzisieren Sie den $o(1)$-Term, indem Sie das Fragezeichen in der folgenden asymptotischen Formel ausfüllen:

$$\beta(s) = c + O(?) \qquad (s \to \infty).$$

Trainingseinheit 2 (Kurvendiskussion und Minima)

(a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ für $x > 0$. Wo liegen die Maxima/Minima, wo wächst bzw. fällt die Funktion monoton, wo ist sie konvex, wo konkav?

(b) Bestimmen Sie die bestmögliche Konstante $c \geq 0$, so dass für $x, y, z > 0$ mit $x + y + z = 1$ gilt

$$c \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

In welchem Fall gilt die Gleichheit?

Hinweis. Warum beginnt diese Trainingseinheit wohl mit (a)? Welches Werkzeug sollte Ihnen da im Zusammenhang mit Ungleichungen einfallen?

Trainingseinheit 3 (Kurvendiskussion und Summenabschätzung)

(a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^{-1} \cdot \ln x$ für $x > 0$. Wo liegen die Maxima/Minima, wo wächst bzw. fällt die Funktion monoton, wo ist sie konvex, wo konkav?

(b) Betrachten Sie die Folge

$$\tau_n = 1^{1/1} \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdots n^{1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Geben Sie mit Hilfe der Integration eine einfache Einschließung von $\ln \tau_n$ an. Warum sind hierfür die Kenntnisse aus (a) wichtig?

(c) Füllen Sie das Fragezeichen in folgender asymptotischen Entwicklung:

$$\ln \tau_n = ? + O(1) \qquad (n \to \infty).$$

Trainingseinheit 3b (Kurvendiskussion) Drücken Sie die Differenz

$$f(b) - f(a)$$

durch die Ableitung f' der Funktion aus. Verwenden Sie dazu den Hauptsatz und die Mittelwertsäze und vergleichen Sie Voraussetzungen und Ergebnisse.

Trainingseinheit 4 (Nullstellen von Polynomen) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ Nullstelle des nicht-konstanten Polynoms $p \in \mathbb{R}[x]$ ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$p(x) = (x - x_0)^n q(x), \qquad q(x_0) \neq 0,$$

wobei $q \in \mathbb{R}[x]$; n heißt dann die *Vielfachheit* der Nullstelle.

(a) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Werten $q(x_0)$ und $p^{(n)}(x_0)$ her, indem Sie sich beispielsweise überlegen, wie Sie

$$q(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x - x_0)^n}$$

auswerten könnten. (Geben Sie auch eine ganz kurze Begründung, warum diese Gleichung für $q(x_0)$ überhaupt gilt.) Kommt Ihnen das nicht bekannt vor? Halt: Schauen Sie nicht nur in ß7.2 nach, sondern vor allen in ß10.1. Sehen Sie den Zusammenhang jetzt „auf einen Blick“?

(b) Berechnen Sie die Werte $p'(x_0), p''(x_0), \ldots, p^{(n-1)}(x_0)$. (Wer hier viel rechnet, hat in (a) nicht gründlich nachgedacht.)

Trainingseinheit 5 (Genauigkeiten)

(a) Schätzen Sie ab, wie groß n gewählt werden muss, damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e$$

auf m Dezimalziffern korrekt ist. Drücken Sie n asymptotisch als möglichst einfache Funktion von m aus.

(b) Wiederholen Sie die Überlegungen aus (a) für

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \approx e.$$

(c) Finden Sie eine einfache rationale Approximation von $\sin(1)$ und geben Sie auch hier den asymptotischen Zusammenhang zwischen Aufwand und Anzahl der korrekten Dezimalziffern an.

Trainingseinheit 6 (Ungleichungen und Asymptotik)

(a) Zeigen Sie für die absteigende Faktorielle

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

die folgende Einschließung:

$$n^k \left(1 - \binom{k}{2} \cdot n^{-1}\right) \;\leq\; n^{\underline{k}} \;\leq\; n^k \exp\left(-\binom{k}{2} \cdot n^{-1}\right).$$

In welchem Sinne ist die untere Abschätzung in der oberen als „erste Näherung enthalten"? (Bei „erster Näherung" sollte Ihnen die Taylor-Entwicklung einfallen.)

(b) Erklären Sie genau, wie man aus (a) die folgende Asymptotik erhält:

$$n^{\underline{k}} = n^k \left(1 - \binom{k}{2} \cdot n^{-1} + O(k^4 \cdot n^{-2})\right) \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Dabei bedeutet

$$g(k,n) = O(k^4 \cdot n^{-2}) \qquad (n,k \in \mathbb{N}),$$

dass es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$|g(k,n)| \leq c\, k^4 \cdot n^{-2} \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

(c) Wie sehen die entsprechenden Ergebnisse (Einschließung und Asymptotik) für die aufsteigende Faktorielle

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1) \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

aus?

Trainingseinheit 7 (Anwendungen des Integrals)

a) Leiten Sie durch vollständige Induktion und partielle Integration die Formel

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^2}{k^2}) \cdot \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}$$

(im Buch von Herrn Bornemann Formel 9.19) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ her, wobei

$$I_n(x) := \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)\cos^n(t)dt$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Folgern Sie aus a) durch logarithmisches Differenzieren

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}) + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}$$

für $x \notin \mathbb{Z}$.