Aufgabe 1:

Notiztitel 18.01.2011

a) Zeigen Sie:

(i) $\tan x \simeq \frac{8x}{\pi^2 - 4x^2}$ und $\sec x \simeq \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2}$ für $\mathbb{R} \ni x \to \pm\frac{\pi}{2}$.

(ii) $$\frac{8x}{\pi^2 - 4x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} x^{2k-1}$$

und $$\frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} x^{2k}$$ f. $|x| < \frac{\pi}{2}$, wobei $\frac{\pi}{2}$ der KR ist.

(iii) Die einzigen Stellen aus $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{\pi}{2}\}$ an denen $\sec z$ und $\tan z$ nicht definiert sind (Singularitäten) sind $z = \pm\frac{\pi}{2}$.

5) Ihnen wird gegeben

$$(*)\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sec x \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}, \text{ wobei } \frac{\pi}{2} \text{ der KR ist.}$$

Ferner wissen Sie: "Falls zwei Potenzreihen an ihren (gemeinsamen) Singularitätspunkten ihres (gleichen) Konvergenzradius asymptotisch gleich sind, dann sind ihre Koeffizienten a_k bzw. b_k für $k \to \infty$ asymptotisch gleich."

Geben Sie nun mit Hilfe dieses Wissens und a) das asymptotische Verhalten von $\frac{A_{2k}}{(2k)!}$ für $k \to \infty$ an.

Lösung:

a) (i)
$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(\pi^2-4x^2)}{\cos x\,(8x)} \underset{\text{l'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(\pi^2-4x^2)+\sin x\,(-8x)}{-\sin x\,(8x)+\cos x\cdot 8} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2-4x^2}{\cos x\,(4\pi)} = \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{-8x}{-\sin x\,(4\pi)} = 1$$

(ii) Es gilt
$$\frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2} = \pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2} =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} x^{2k} \quad \text{für } \left|\frac{2x}{\pi}\right|<1$$

$$\Rightarrow \frac{8x}{\pi^2-4x^2} = \frac{2x}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} = \frac{2x}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+2} x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} x^{2k-1}$$

für $\left|\frac{2x}{\pi}\right| < 1$

(iii) Die einzigen Stellen $z\in\mathbb{C}$, $|z| = \frac{\pi}{2}$ an denen $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ und $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ nicht definiert sein <u>könnten</u> sind diejenigen für die $\cos z = 0$, d.h. $e^{iz}+e^{-iz} = 0$, gilt.

Mit $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, also diejenigen für die

$$e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y} = 0.$$

Da $|e^{ix}e^{-y}| = e^{-y}$, $|e^{-ix}e^{y}| = e^{y}$ gilt, kommen also nur diejenigen $z \in \mathbb{C}$ in Frage für die $e^{-y} = e^{y}$, d.h. $e^{2y} = 1$, d.h. $y = 0$, gilt. Für diese gilt aber $z = x \in \mathbb{R}$ und damit $2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$.

Also gilt $\cos z = 0$ für $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \frac{\pi}{2}$ genau dann wenn $\cos x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \frac{\pi}{2}$ d.h. also genau für $z = x = \pm\frac{\pi}{2}$.

b) Aus $(*)$ und a) ii) wissen wir, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sec x$$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} x^{2k} = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2}$$ beide den KR $\frac{\pi}{2}$ haben.

Ferner wissen wir nach a) iii), dass ihre (gemeinsamen) Singularitäten für $|z| = \frac{\pi}{2}$ aus den Punkten $x = \pm \frac{\pi}{2}$ bestehen.
Schließlich besagt a) i), dass $\sec x \simeq \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2}$ für $x \to \pm \frac{\pi}{2}$.

Also folgt aus dem zitierten Satz:

$$\frac{A_{2k}}{(2k)!} \simeq 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} \text{ für } k \to \infty.$$