Prof. Dr. Oliver Junge
Wissenschaftliches Rechnen
Zentrum Mathematik
TU München
http://www-m3.ma.tum.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Analysis 3 für das Lehramt an Berufsschulen

WS 2005/06

Übungsblatt 4

Abgabe bis zum 8.12.05

Aufgabe 4.1 (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + y^2 \sin(\frac{1}{y}), & \text{für } xy \neq 0, \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 = y, \\ y^2 \sin(\frac{1}{y}), & \text{für } x = 0 \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.

Aufgabe 4.3 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{(5x + xy, 6y + x^2y^3) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in (0,1)\}$ eine offene Teilemenge des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) Es sei

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - xy - x.$$

Bestimmen Sie $(a,b), (\alpha,\beta) \in [0,1]^2$, so dass für alle $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt:

(i) $f(a,b) \leq f(x,y)$ und

(ii) $f(x,y) \leq f(\alpha,\beta)$.

Aufgabe 4.5 (3 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, f sei stetig in $(0,0)$, g sei partiell differenzierbar in $(0,0)$ nach der ersten Variablen und es sei $g(0,0) = (0,0)$. Zeigen sie, dass auch die Funktion

$$fg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)g(x,y)$$

in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach der ersten Variablen ist.