TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. Oliver Junge
Wissenschaftliches Rechnen
Zentrum Mathematik
TU München

Analysis 3 für das Lehramt an Berufsschulen

WS 2005/06

Übungsblatt 3

Abgabe bis zum 24.11.05

Aufgabe 3.1 (3 Punkte) Zeigen Sie: Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ und jede reelle Zahl $\alpha > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$F_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^n}\, dx.$$

Aufgabe 3.2 (2 Punkte) Zeigen Sie:

$$n^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-nt}\, t^{x-1}\, dt$$

für $x > 0$ und $n > 0$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) Es sei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ($a > 0$) und

$$I(f) = af(0) + \frac{1}{2}a^2 f'(0).$$

Beweisen Sie die Abschätzung

$$\left| \int_0^a f(x)\, dx - I(f) \right| \leq \frac{1}{6}a^3 \max_{x\in[0,a]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 3.4 (4 Punkte) Geben Sie Beispiele für Funktionen mit den folgenden Eigenschaften an oder begründen Sie, dass keine solche Funktion existiert:

(i) $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, aber nicht stetig;

(ii) $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht beschränkt;

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht differenzierbar;

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, aber f_4' ist nicht stetig.

Aufgabe 3.5 (3 Punkte) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche $M = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x^4 \leq y^2 \leq x\}$.