Analysis III für LB

Notiztitel 05.12.2005

5. Extremwerte

Gegeben sei eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Problemstellung: finde Maximum oder Minimum von f

d.h. finde $x \in D$ mit (lokales Maximum):

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{für alle } y \text{ nahe } x.$$

a) ohne Nebenbedingungen

Notwendige Bedingung für Extremum in $a \in D$:

Tangentialebene ist „horizontal"

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla f(a) = 0} \qquad \text{(falls } f \text{ differenzierbar)}$$

Hinreichende Bedingung für Extremum in $a \in D$:

Es sei f in einer Umgebung von $a \in D$ 2-mal stetig differenzierbar mit $\nabla f(a) = 0$. Dann gilt

i) Wenn die Hesse-Matrix $H_f(a)$ positiv bzw. negativ definit ist, so hat f in a ein strenges lokales Minimum bzw. Maximum.

Wenn die Hesse-Matrix $H_f(a)$ positiv bzw. negativ semi-definit ist, so hat f in a ein lokales Minimum bzw. Maximum.

Matrix A heißt positiv (negativ) definit, falls

$$x^T A x > 0 \quad (\text{bzw } < 0) \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Ausrechnen im $\mathbb{R}^2$: $|A| > 0$; $a_{11} > 0 \Rightarrow$ pos. def.

$a_{11} < 0 \Rightarrow$ neg. def.

$|A| < 0 \Rightarrow A$ indefinit

ii) Ist $H_f(a)$ indefinit, so hat f in a kein lokales Extremum.

Beispiel: $f(x,y) = xy^2(y - e^x)$

- Bestimmung der „stationären" (bzw. „kritischen") Punkte (d.h. mit $\nabla = 0$).

$$f_x(x,y) = y^2(y - e^x) + xy^2(-e^x) = y^2(y - e^x - xe^x)$$

$$f_y(x,y) = 2xy(y - e^x) + xy^2 = xy(3y - 2e^x)$$

$$\nabla f(x,y) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big) \overset{!}{=} 0 \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & y = 0 \text{ oder } y = (1+x)e^x \\ \text{(ii)} & x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = \frac{2}{3}e^x \end{cases}$$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow y = 1$, d.h. $a = (0,1)$

2. Fall: $y = 0 \Rightarrow x$ beliebig, d.h. $a = (x,0)$

3. Fall: $\underbrace{y = \frac{2}{3}e^x, \quad y = (1+x)e^x}_{\Rightarrow \frac{2}{3}e^x = (1+x)e^x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}} \Rightarrow \nabla f(x,y) = 0$

$$\Rightarrow a = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}}\right)$$

- Extremstellen-Test mit der Hesse-Matrix:

$$f_{xx}(x,y) = -y^2e^x - y^2e^x - y^2xe^x = y^2e^x(-2-x)$$

$$f_{yy}(x,y) = 6xy - 2xe^x = 2x(3y-e^x)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2y(y-e^x-xe^x)+y^2$$

- $\det(H_f(0,1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, d.h.

  $H_f(0,1)$ ist indefinit, d.h. dort keine Extremstelle

- $$\det\left(H_f\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}}\right)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{20}{27}e^{-1} & \frac{4}{9}e^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{4}{9}e^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

  $$= \frac{40}{81}e^{-\frac{4}{3}} - \frac{16}{81}e^{-\frac{4}{3}} > 0,$$

  $\underbrace{\text{sowie } -\frac{20}{27}e^{-1} < 0}$ $\Rightarrow$ negativ definit

  also ist $a = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}}\right)$ ein lokales Maximum.

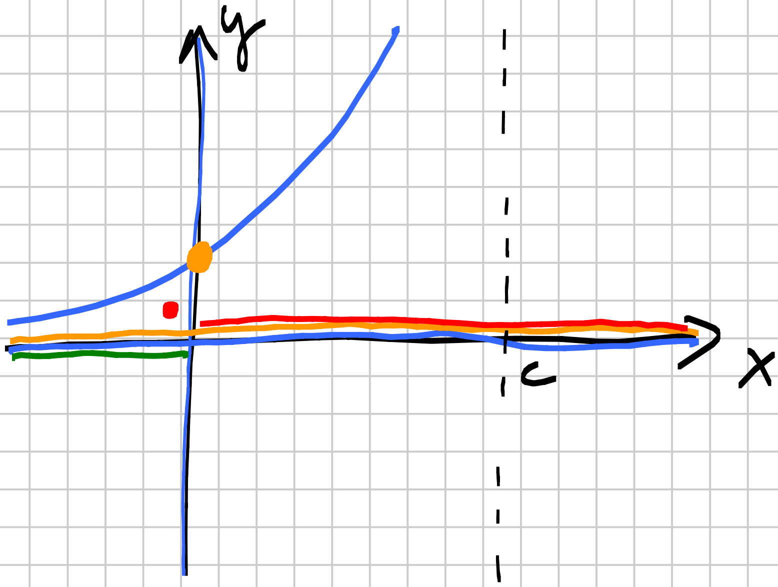
- $\det(H_f(x,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2xe^x \end{vmatrix} = 0$

  Es gilt also:

  $$(v,w)\,H_f(x,0)\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = (v,w)\begin{pmatrix} 0 \\ -2wxe^x \end{pmatrix} = -2w^2xe^x = (*)$$

  d.h. also

  $$(*) = \begin{cases} < 0 & \text{für } x > 0 \quad (\text{neg. semi-def.}) \\ > 0 & \text{für } x < 0 \quad (\text{pos. semi-def.}) \end{cases}$$



Nullstellen von f

Maxima, Minima

Kandidaten für Extrema