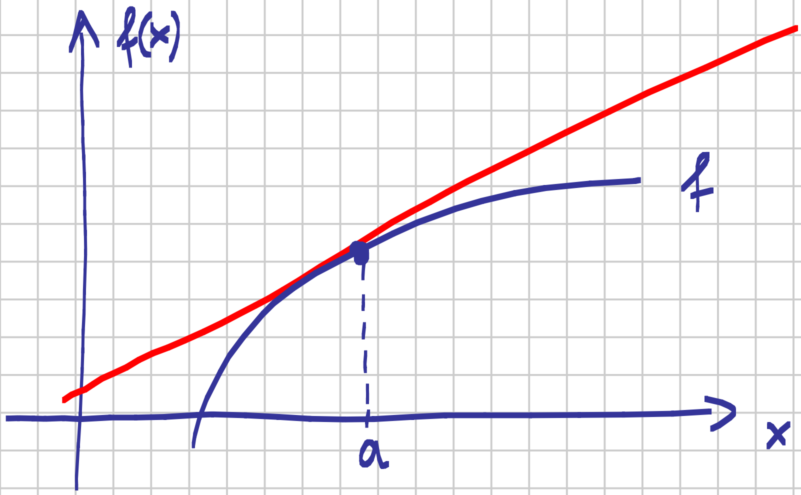
Analysis 3 für das Lehramt an beruflichen Schulen

2. Differenzierbarkeit, lineare Approximation

Im Eindimensionalen:



Tangente an f in a

Steigung: $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

oder:

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \cdot \frac{h}{h}$$

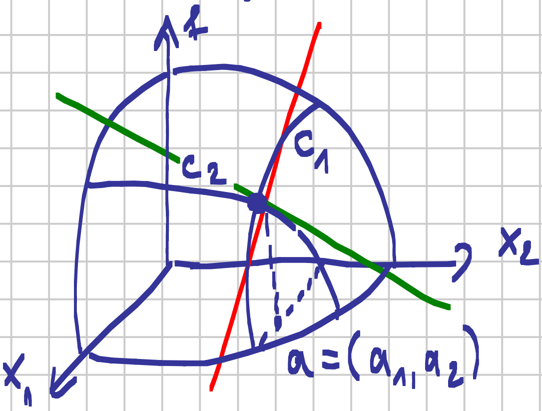
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \underbrace{[f(a) + f'(a)h]}_{\text{Tangente}}}{h}$$

d.h. in der Nähe von a wird f gut durch die Tangente in a approximiert:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h = t_a(h)$$

$$T_a = \{(a+h, t_a(h)) \mid h \in \mathbb{R}\}$$

Im Zweidimensionalen:



$$c_1 = \{(x_1, a_2, f(x_1, a_2)) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$c_2 = \{(a_1, x_2, f(a_1, x_2)) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Tangenten in a an c_1 und c_2:

$$t_a^1(h) = f(a) + f_{x_1}(a)\,h \qquad , h \in \mathbb{R}$$

$$T_a^1 = \{(a_1+h, a_2, t_a^1(h)) \mid h \in \mathbb{R}\}$$

$$t_a^2(h) = f(a) + f_{x_2}(a)\,h \qquad , h \in \mathbb{R}$$

$$T_a^2 = \{(a_1, a_2+h, t_a^2(h)) \mid h \in \mathbb{R}\}$$

Diese beiden Tangenten liegen in der Ebene

$$t_a(h_1,h_2) = f(a) + f_{x_1}(a)\,h_1 + f_{x_2}(a)\,h_2$$

$$T_a = \{(a_1+h_1, a_2+h_2, t_a(h_1,h_2)) \mid h_1,h_2 \in \mathbb{R}\}$$

bzw

$$t_a(h_1,h_2) = f(a) + \langle \nabla f(a), (h_1,h_2)\rangle$$

mit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\|$$

$$t_a(h) = f(a) + f'(a)\cdot h$$

$$T_a = \{(a+h, t_a(h)) \mid h \in \mathbb{R}^2\}$$

Tangentialebene an f in a

Definition 2.1: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt in a (total) differenzierbar, falls $\nabla f(a)$ existiert und

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(a+h) - [\underbrace{f(a) + \nabla f(a)\,h}_{= t_a(h)}]}{\|h\|} = 0.$$

Grenzwert für beliebige Folgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|h_n\| \to 0$ f. $n \to \infty$

Die Differenzierbarkeit von f in a bedeutet Approximierbarkeit durch die (affin) lineare Funktion t_a.

SATZ 2.2: Existiert $\nabla f(x)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$ und ist dort stetig, so ist f in a differenzierbar.

f heißt in $A \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt aus A differenzierbar ist.

3. Richtungsableitung

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Ihre partiellen Ableitungen geben die Änderung der Funktionswerte in Richtung der Koordinatenachsen an. Wir verallgemeinern dies auf beliebige Richtungen:

Wir nennen f in einem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ längs $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\partial_w f(a) = f_w(a) = \frac{\partial f}{\partial w}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

existiert. Es gilt, falls f stetig partiell differenzierbar ist

$$f_w(a) = \langle \nabla f(a), w \rangle$$

$$= f_{x_1}(a)\, w_1 + f_{x_2}(a)\, w_2 + \dots + f_{x_n}(a)\, w_n$$

Für $w = (1, 0, \dots, 0) = e_1$ erhält man also $f_{x_1}(a)$.

4. Die Taylor-Formel

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei $k+1$ mal stetig partiell differenzierbar. Für einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, erhält man die Funktion

$$x \mapsto \partial_w f(x) = \langle \nabla f(x), w \rangle$$

$$\begin{matrix} \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{matrix}$$

Für $k \geq 1$ kann man diese Funktion erneut in Richtung w ableiten:

$$\partial_w(\partial_w f(x)) =: \partial_w^2 f(x)$$

Wir erhalten:

$$\partial_w^2 f(x) = \langle \nabla(\partial_w f(x)), w \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\partial_w f(x))\, w_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(\langle \nabla f(x), w\rangle\right) w_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x)\, w_j\right) w_i$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j\, \partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)$$

$$= (w_1, \dots, w_n)\; Hf(x) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$\langle v, w \rangle = v^T w$

mit $$Hf(x) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(x) \end{bmatrix}$$

„Hesse-Matrix" (symmetrisch, falls part. Abl. stetig!)

Analog kann man für $\partial_w^3 f(x), \dots$ verfahren.

<u>SATZ 4.1</u> (Taylor-Formel) Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei $k+1$ mal stetig differenzierbar. Dann gilt für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ mit $[a, a+w] \subset D$:

↑ Verbindungsstrecke zwischen a und $a+w$

$$f(a+w) = \underbrace{f(a) + \underset{=\langle \nabla f(a), w\rangle}{\partial_w f(a)} + \frac{1}{2}\partial_w^2 f(a) + \dots + \frac{1}{k!}\partial_w^k f(a)}_{= T_k(a+w) \text{ Taylorpolynom}} + R_{k+1}(a+w)$$

mit $\quad R_{k+1}(a+w) = \frac{1}{(k+1)!} \partial_w^{k+1} f(v) \quad , v \in [a, a+w]$.

Beispiel / Spezialfall: $k=0$: Mittelwertsatz

$$f(a+w) = f(a) + R_1(a+w) = f(a) + \frac{1}{1!} \partial_w f(v)$$

also $\quad f(a+w) = f(a) + \langle \nabla f(v), w \rangle$

Zwischenstelle!

$$\approx f(a) + \langle \nabla f(a), w \rangle$$

Beispiel: $\quad f(x_1, x_2) = \sqrt{16 - 4x_1^2 - x_2^2}$

Tangentialebene an der Stelle $a = (1,2)$:

$$t(h_1, h_2) = 2\sqrt{2} + (-\sqrt{2})\, h_1 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) h_2$$