9.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y' = Ay} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$y' = f(x,y)$ 1. Ordnung

Reduktion der Ordnung:

$y'' = f(x,y,y')$ 2. Ordnung

Trick: $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2 \\ f(x, Y_1, Y_2) \end{pmatrix}$

1. Ordnung!

Autonomisierung

$y' = f(x,y)$ nicht-autonom $\quad$ ($y' = f(y)$ autonom)

Trick: $Y = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix}$

$$F(Y) = \begin{pmatrix} f(Y_2, Y_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

neue DGL: $Y' = F(Y)$

SATZ 9.15: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a \in \mathbb{C}^n$ sei ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $Aa = \lambda a$.

Dann ist die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$,

$$\varphi(x) = a e^{\lambda x}$$

eine Lösung der DGL.

Beweis: $\varphi'(x) = \lambda a e^{\lambda x} = A a e^{\lambda x} = A\varphi(x)$.

Korollar 9.16: Besitzt die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Basis aus Eigenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von A, so bilden die Funktionen

$$\varphi_k: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \quad \varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL.

„Problem": Nicht zu jeder Matrix gibt es eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Satz 9.17: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei eine orthogonale $n\times n$-Matrix. Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung der DGL

$$y' = Ay$$

wenn die Funktion $\psi := S^{-1}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lösung der DGL

$$z' = (S^{-1}AS)\, z$$

ist.

Beweis: $\psi'(x) = S^{-1}\varphi'(x) = S^{-1}A\varphi(x) = S^{-1}AS\psi(x)$.

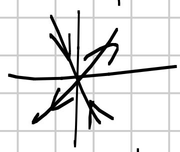
Beispiel 9.18: Gegeben sei die DGL

$$y' = Ay$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Die Matrix A besitzt eine Basis von reellen Eigenvektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = a_2 e^{\lambda_2 x}$$

ein Lösungs-Fundamentalsystem. 

(ii) Die Matrix A hat zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega \quad , \mu \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}.$$

Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren a_1, a_2 ebenfalls konjugiert komplex

$$a_{1,2} = b \pm ic \quad , \quad b, c \in \mathbb{R}^2$$

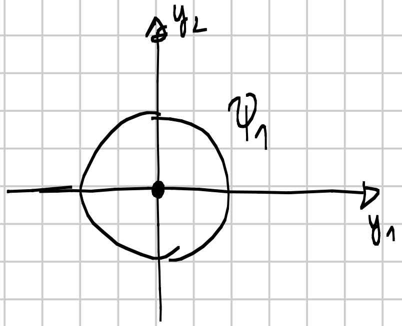
Aus den komplexen Lösungen

$$\varphi_k(x) = a_k e^{\lambda_k x} \quad , k = 1,2$$

lässt ein reelles Fundamentalsystem gewinnen.

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = (b \cos \omega x - c \sin \omega x)\, e^{\mu x}$$

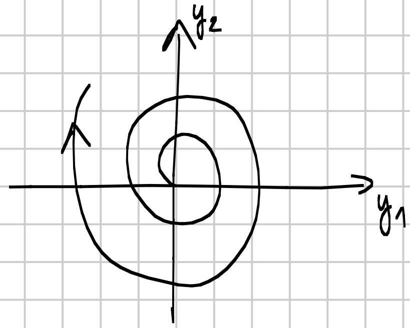
$$\psi_2(x) = \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = (b \cos \omega x + c \sin \omega x)\, e^{\mu x}$$



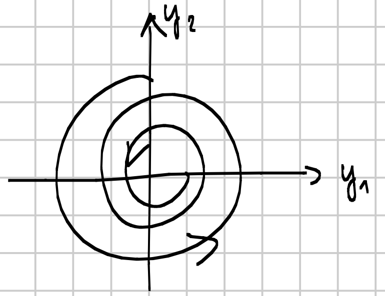
$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu = 0$



$\mu > 0$



$\mu < 0$

(iii) Die Matrix A besitzt nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem eindimensionalen Eigenraum. Dann gibt es eine orthogonale Matrix S mit

$$B = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige transformierte DGL hat die Form

$$z' = Bz$$

d.h.

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + \alpha z_2 \qquad (1) \\ z_2' &= \qquad\quad \lambda z_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Lösungs-Fundamentalsystem

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

Für $\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}$ erhält man zunächst aus (2)

$$\varphi_{22}(x) = e^{\lambda x}$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich

$$z_1' = \lambda z_1 + \alpha e^{\lambda x}$$

Diese Gleichung hat die Lösung $\varphi_{21}(x) = \alpha x e^{\lambda x}$.
Um die ursprüngliche DGL zu lösen, hat man die Transformation $z = S^{-1} y$ wieder umzukehren, man erhält als Fundamentalsystem

$$\varphi_1(x) = S\psi_1(x) \quad , \quad \varphi_2(x) = S\psi_2(x)$$

Mit $S = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

ist $\varphi_1(x) = v e^{\lambda x}$, $\varphi_2(x) = (w + \underline{\alpha x v}) e^{\lambda x}$ ← vom α im Jordan-Block.

ENDE