Analysis II für LB

Notiztitel 30.01.2006

Definition 9.1: Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion, dann nennt man

$$y' = f(x,y) \qquad \left[y'(x) = f(x, y(x)) \right] \text{ für alle } x.$$

ein System von n Differentialgleichungen. Unter einer Lösung der Differentialgleichung versteht man eine Funktion

$$\varphi: I \to \mathbb{R}^n, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall}, \ (= y)$$

mit den folgenden Eigenschaften

a) der Graph von φ ist in D enthalten;

b) $$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Definition 9.2: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Man sagt, f genügt in D einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, wenn für alle $(x,y) \in D$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ gilt:

$$\| f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y}) \| \leq L \, \| y - \tilde{y} \|.$$

Man sagt, f genügt in D lokal einer Lipschitz-Bedingung, falls jeder Punkt $(a,b) \in D$ eine Umgebung U besitzt, so dass f auf $D \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung genügt (wobei die Lipschitz-Konstante L von U abhängen kann).

Satz 9.3: Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$, $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$, bzgl. y stetig partiell differenzierbar. Dann genügt f in D lokal einer Lipschitz-Bedingung mit

$$L = \sup\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\| : (x,y)\in U\right\}.$$

Beispiel: Betrachte $f(y) = y^{2/3}$, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y) = f'(y) = \frac{2}{3}\, y^{-\frac{1}{3}}$$

Betrachte z.B. $y=1$: $\frac{\partial f}{\partial y}(1) = \frac{2}{3}$

$$U = \left[1-\tfrac{1}{10},\, 1+\tfrac{1}{10}\right]: \max_{y\in U}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(y)\right|\right\} = \underline{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{3}}}$$

$\rightarrow$ f genügt Lip.-Bed. mit $L=$ auf U.

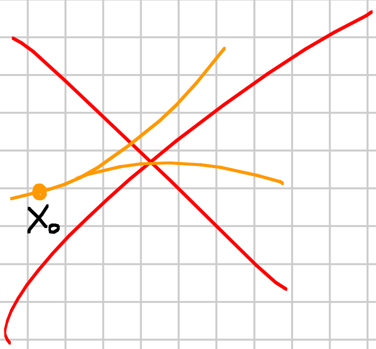
nicht möglich für $y=0$!

Satz 9.4 (Eindeutigkeitssatz): Sei $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ und $f: D\to\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi,\psi: I\to\mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der DGL $y' = f(x,y)$. Gilt

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{für ein } x_0\in I,$$

dann

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{für alle } x\in I.$$



Beispiel: Betrachte $y' = y^{2/3}$. $\Leftarrow$

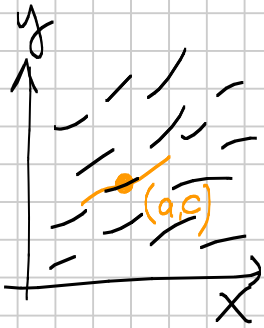
Eine spezielle Lösung ist $\varphi_0(x) = 0$. Andere Lösungen sind

$$\psi_a(x) = \frac{1}{27}(x-a)^3$$

[denn $\varphi_a'(x) = \frac{1}{9}(x-a)^2 = \left(\frac{1}{27}(x-a)^3\right)^{2/3} = \varphi_a(x)^{2/3}$.]

Es gilt aber: $\varphi_a(a) = 0 = \varphi_0(a)$.

(Hier gilt der Eindeutigkeitssatz nicht, da f in 0 keiner lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.)



Satz 9.5 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf) Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(a,c)\in D$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung

$$\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$$

der DGL $y' = f(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$.

Zum Beweis: Picard–Lindelöfsches Iterationsverfahren

Eine stetige Funktion $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ genügt genau der DGL $y' = f(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$, wenn

?

$$\varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Wir definieren folgende Folge von Funktionen:

$$\varphi_0(x) = c$$

$$\varphi_{k+1}(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t))\,dt \quad \left[=: T[\varphi_k](x) \right]$$

Man kann zeigen, dass die Folge (φ_k) gleichmäßig gegen eine Lösung der DGL konvergiert.

Beispiel: Wir betrachten $y' = 2xy$

Wir suchen eine Lösung, die der Anfangsbedingung $\varphi(0)=c$ genügt:

$$\varphi_0(x)=c$$

$$\varphi_1(x)=c+\int_0^x 2\overset{\text{„}x\text{"}}{t}\,\overset{\text{„}\varphi_0(t)\text{"}}{c}\,dt \quad = c+2c\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) = c(1+x^2)$$

$$\varphi_2(x)=c+\int_0^x 2t\underbrace{\left(c(1+t^2)\right)}_{=\varphi_1(t)}\,dt$$

$$= c+2c\left[\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{4}t^4\right]_0^x = c\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}\right)$$

... (Induktion)

$$\varphi_k(x) = c\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3!}+\dots+\frac{x^{2k}}{k!}\right)$$

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = \underline{\underline{ce^{x^2}}}$$

Diese Funktion löst die DGL $y'=2xy$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(0)=c$.

9.1. Elementare Lösungsmethoden

a) Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Seien $I, J\subset\mathbb{R}$ offene Intervalle, $f: I\to\mathbb{R}$, $g: J\to\mathbb{R}$, $g(y)\neq 0$ für $y\in J$. Die Differentialgleichung

$$y'=f(x)\,g(y) \qquad \left[y'(x)=f(x)\,g(y(x))\right]$$

heißt Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Idee der Lösung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \text{"}\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx\text{"}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \text{"}\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx\text{"}$$

Diese Gleichung löst man nun nach y auf, um zu einer Lösung der DGL zu gelangen.

Beispiel: $y' = y^2$

Wir suchen Lösungen φ mit $\varphi(0) = c$.

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \text{"}\frac{dy}{y^2} = 1 \cdot dx\text{"}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \text{"}\int \frac{dy}{y^2} = x\text{"}$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \text{"}-\frac{1}{y} + K = x\text{"}$$

$$+\frac{1}{y} = -(x - K$$

$$y = \frac{-1}{x-K},$$

Es soll gelten $y(0) = c$, also folgt

$$y(0) = \frac{1}{K} = c \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{c}}$$

Saubere Formulierung:

Satz 9.6: Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$ ein Punkt. Definiere

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}.$$

Es sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und

$F(I') \subset G(J)$. Dann existiert genau eine Lösung

$\varphi : I' \to \mathbb{R}$

der DGL mit $\varphi(x_0) = y_0$. Diese Lösung genügt der Beziehung

$$G(\varphi(x)) = F(x) \qquad \text{für alle } x \in I'.$$