# Analysis III für LB, Übungsblatt 9 – Musterlösung –

Notiztitel 01.02.2006

**Aufgabe 9.1 (4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Kurve $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(t) = (t, t^2\cos(\pi/t^2)), \quad t \in (0,1], \quad \varphi(0) = (0,0),$$

stetig, aber nicht rektifizierbar ist. Betrachten Sie dazu den Polygonzug zur Zerlegung $t_0 = 0, t_j = 1/\sqrt{n-j+1}, j = 1,2,\ldots,n$, von $[0,1]$.

$\varphi$ ist offenbar stetig in $(0,1]$. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi$ stetig in $0$ ist. Es gilt

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0}(t, t^2\cos(\pi/t^2)) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim t^2\cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right)\right) = (0,0) = \varphi(0),$$

da $|\cos(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Um zu zeigen, dass $\varphi$ nicht rektifizierbar ist, betrachten wir die Zerlegung $Z_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[0,1]$ mit $t_j = 1/\sqrt{n-j+1}$, $j = 1, \ldots, n$, $t_0 = 0$. Der zugehörige Polygonzug hat die Länge

$$L(\varphi, Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|$$

$$= \|\varphi(1/\sqrt{n}) - \varphi(0)\| + \sum_{j=2}^{n} \left\|\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n-j+1}}\right) - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n-j+2}}\right)\right\|$$

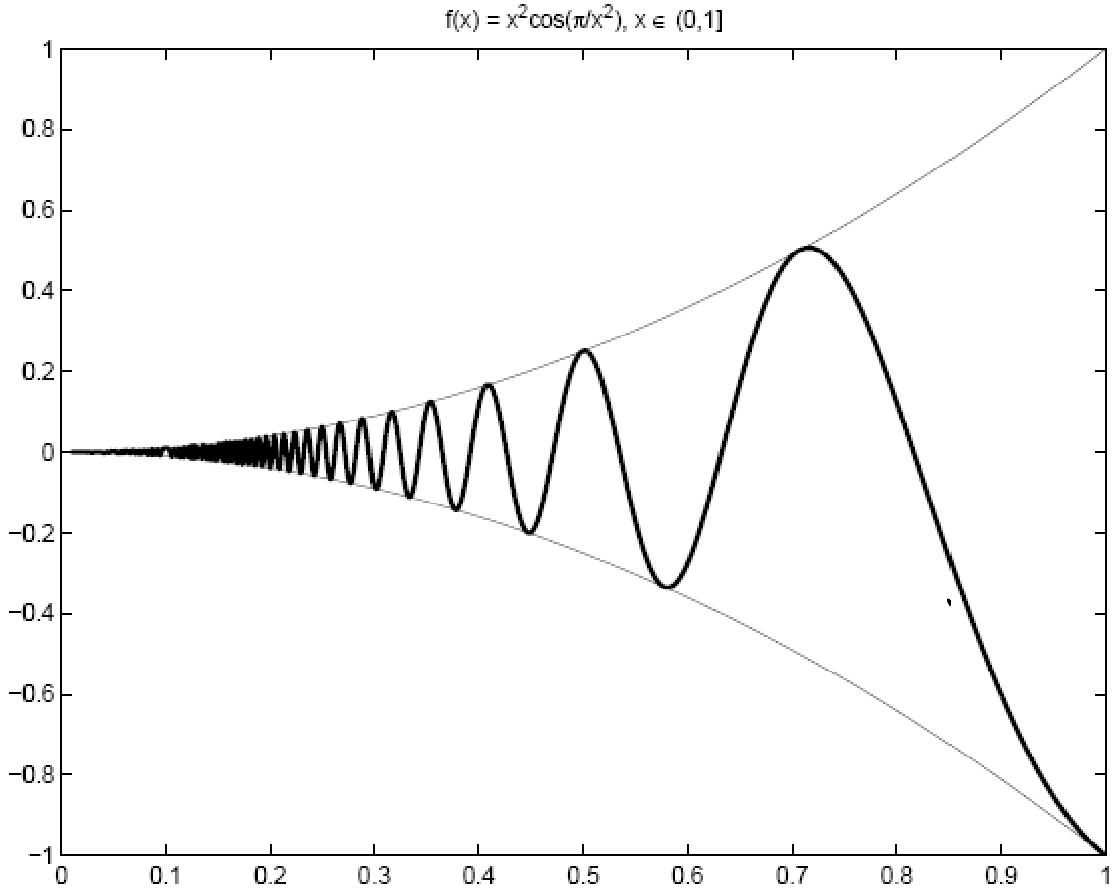
$[\cos(k\pi) = (-1)^k]$

$$\geq \sum_{j=2}^{n} \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{n-j+1}}, \frac{(-1)^{n-j+1}}{n-j+1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n-j+2}}, \frac{(-1)^{n-j+2}}{n-j+2}\right)\right\|$$

$$\geq \sum_{j=2}^{n} \left|\frac{1}{n-j+1} - \frac{1}{n-j+2}\right| \geq 2\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n-j+2}$$

$$= 2\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty .$$

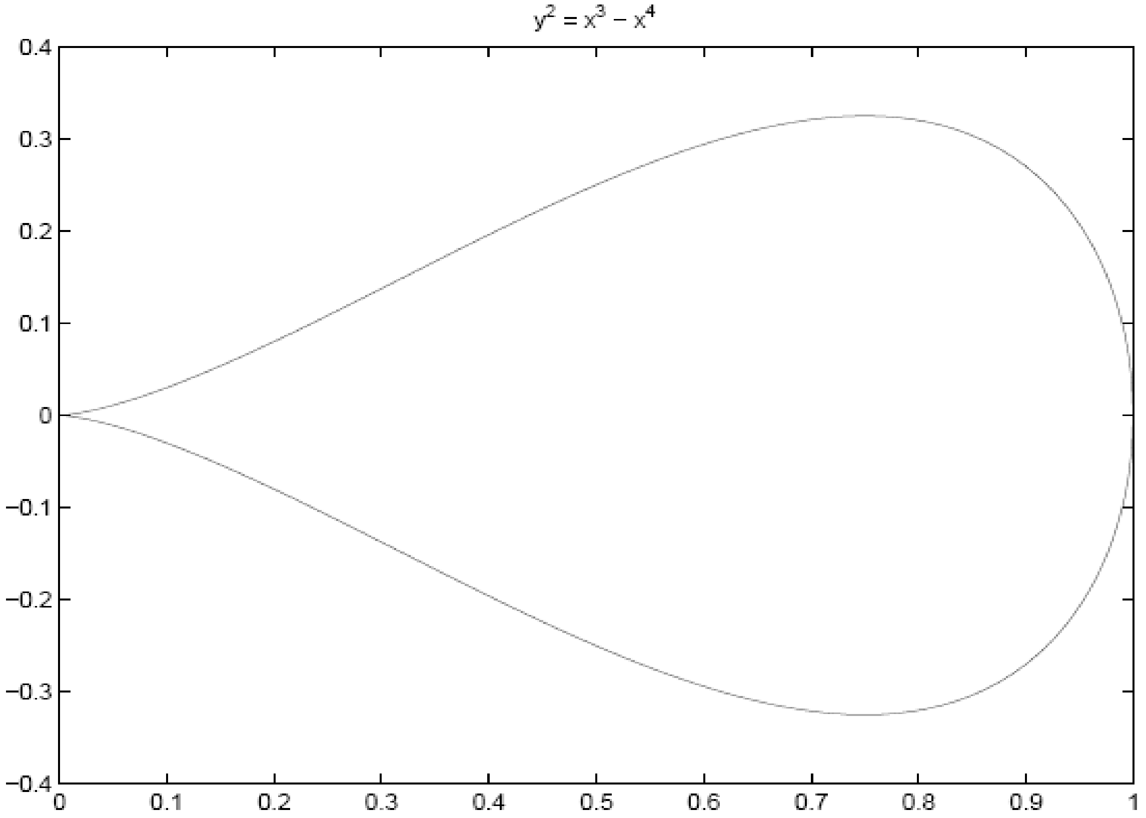
Also ist $\varphi$ nicht rektifizierbar.



**Aufgabe 9.2 (3 Punkte)** Gegeben ist die (geschlossene) Kurve

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 - x^4\}.$$

Skizzieren Sie $G$ und bestimmen Sie alle Punkte auf $G$, in denen die Tangente an $G$ durch den Koordinatenursprung $(0, 0)$ geht.




$G$ läßt sich also darstellen als $G = G_+ \cup G_-$ mit $G_+ = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$, $G_- = \{(x, -f(x)) : x \in [0,1]\}$, wobei

$$f(x) = x\sqrt{x(1-x)}$$

Die Tangente in $(x_0, y_0) \in G_+ \setminus \{0\}$ läßt sich also darstellen als

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Der Punkt $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt diese Gleichung, wenn

$$f'(x_0)\, x_0 = f(x_0)$$

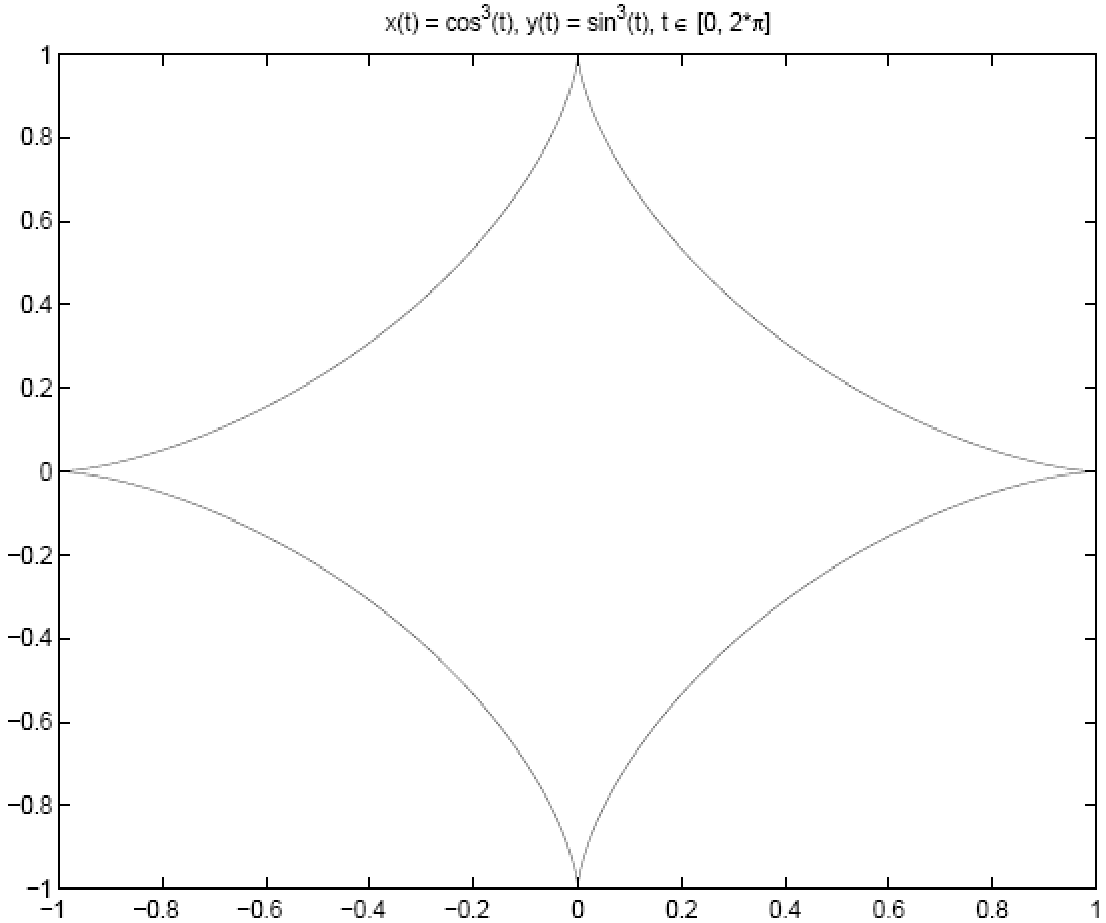
Es ist

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}, \quad 0 < x < 1,$$

Also gilt $x_0 f'(x_0) = f(x_0) \iff 2(1-x_0) = 3-4x_0 \iff x_0 = \frac{1}{2}$

Die gesuchten Punkte sind also $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

**Aufgabe 9.3 (3 Punkte)** Sei $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$. Skizzieren Sie die durch $\varphi$ gegebene Kurve und berechnen Sie Ihre Länge.




Es ist $\varphi'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, \ 3\sin^2 t \cos t)$,

also $\|\varphi'(t)\|^2 = 9\cos^2 t \sin^2 t$

und damit

$$L(\varphi) = 4\int_0^{\pi/2} \|\varphi'(t)\| \, dt = 4\int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \, dt = \underline{\underline{6}}$$

**Aufgabe 9.4 (3 Punkte)** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = (x+y)^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie die Funktion $u(x) = x + y(x)$ als neue unbekannte Funktion einführen.

Es sei $u(x) = x + y(x)$, also $u'(x) = 1 + y'(x)$. Eingesetzt in die gegebene DGL ergibt sich

$$u'(x) - 1 = u^2(x),$$

d.h. die DGL $$u' = 1 + u^2.$$

Diese ist vom Typ „getrennte Variablen", wir erhalten, mit $u(0) = 0$ erhalten wir aus

$$\int_0^u \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x dt$$

also $$\arctan u = x$$

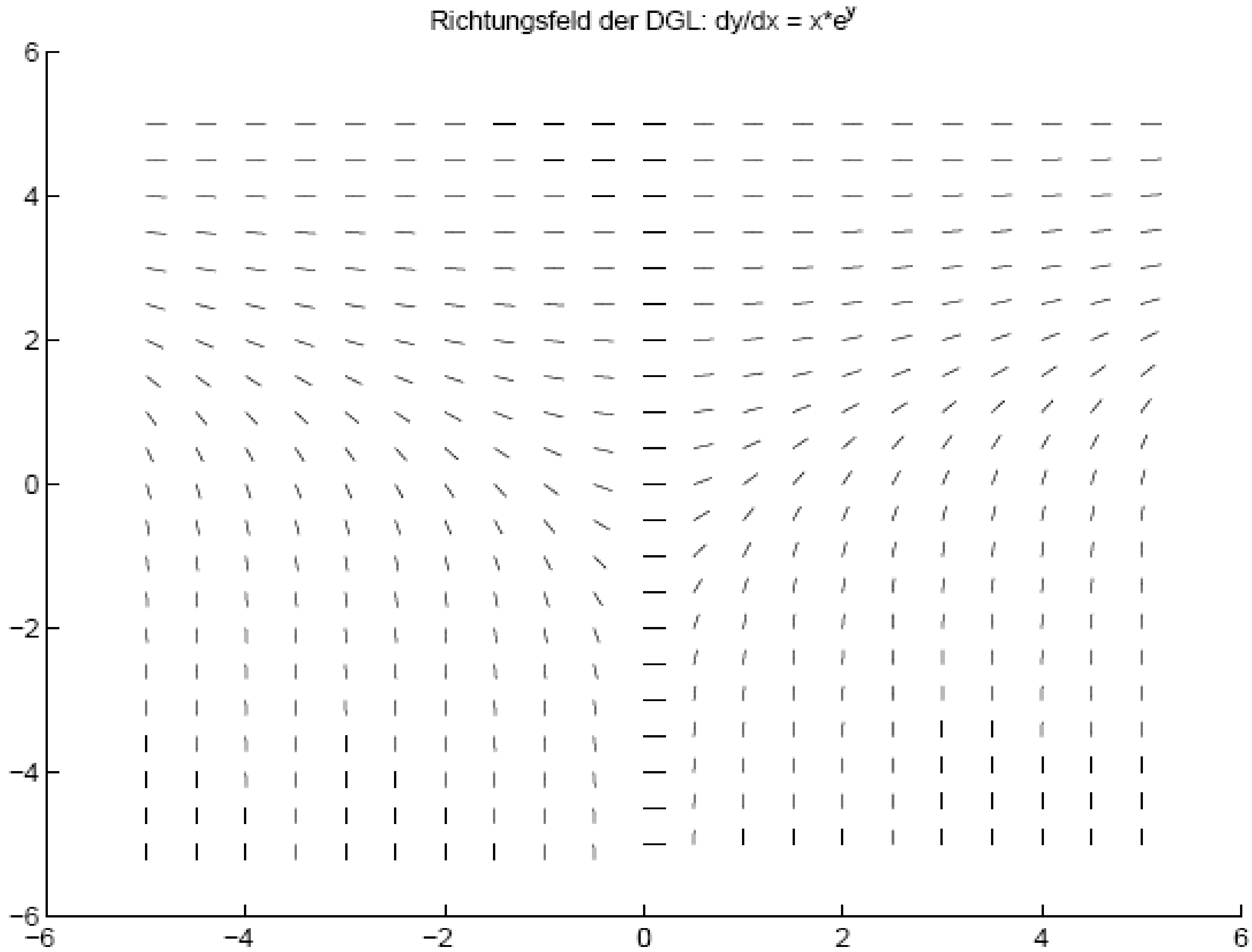
bzw. $$u = \tan x$$

d.h. die Lösung $y(x) = \tan x - x$ mit maximalem Definitionsbereich $]-\pi/2, \pi/2[$.

**Aufgabe 9.5 (3 Punkte)** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = xe^{-y}.$$

Skizzieren Sie das Richtungsfeld. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = c \in \mathbb{R}$. Wie weit lässt sich die Lösung maximal fortsetzen?




Wieder handelt es sich um eine DGL vom Typ „getrennte Variablen". Da $e^{-y}$ stets $\neq 0$ ist, ist die DGL äquivalent zu der Gleichung

$$e^y y' = x$$

Eine Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = c$ erhält man durch Integration:

$$\int_c^y e^t \, dt = \int_0^x t \, dt$$

also $\qquad e^y - e^c = \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow \qquad y(x) = \log\left(e^c + \frac{1}{2}x^2\right),$

diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und löst die DGL.