Analysis III für LB, Übungsblatt 8 — Musterlösung —

Notiztitel 26.01.2006

Aufgabe 8.1 (3 Punkte) Gegeben sei das Rechteck $[-1,1]\times[-1,1]$ im $\mathbb{R}^2$. Weiter sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^4y^4}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_R \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x,y)\,dxdy.$$

Fundamentalsatz: $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b)-f(a)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=g}\Big)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g\,(x,y)}$$

$$\int_R \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big]_{-1}^{1}dy = \int_{-1}^{1}\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(-1,y)\,dy$$

$$= \Big[f(1,y)-f(-1,y)\Big]_{-1}^{1} = f(1,1)-f(-1,1)-f(1,-1)+f(-1,-1).$$

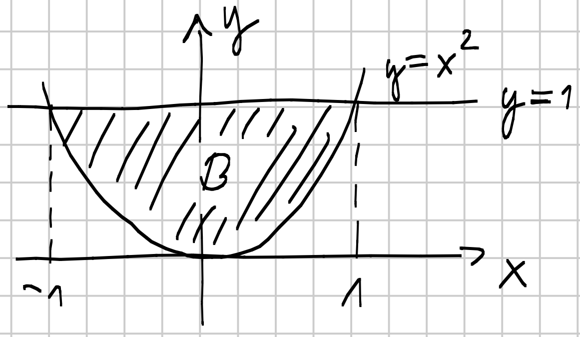
Mit $f(x,y)=\sqrt{1-x^4y^4}$ folgt also

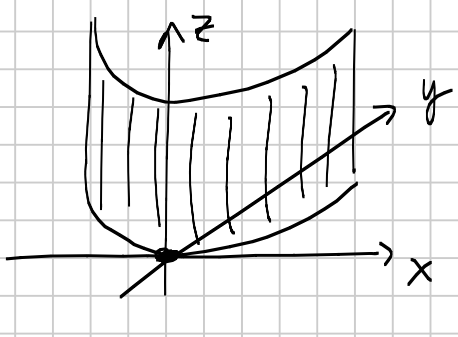
$$\ldots = \sqrt{1-1}-\sqrt{1-1}-\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1} = \underline{\underline{0}}$$

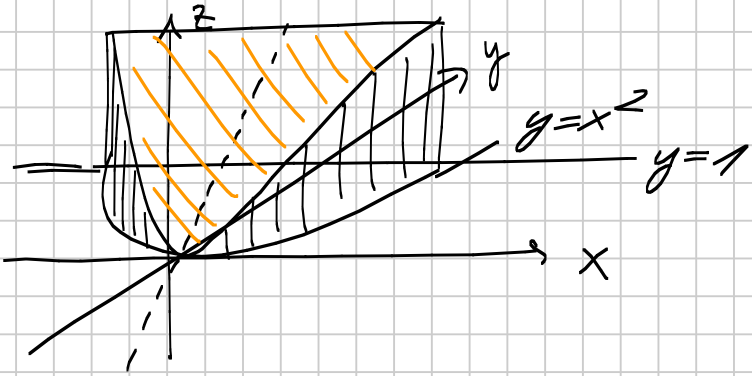
Aufgabe 8.2 (3 Punkte) Ein Körper im $\mathbb{R}^3$ wird begrenzt durch die Zylinderfläche

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=x^2\}$$

und die Ebenen mit den Gleichungen $z=0$, $z=y$ und $y=1$. Berechnen Sie sein Volumen.







$$\mathrm{Vol} = \int_B y \, dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} y \quad dy\,dx$$

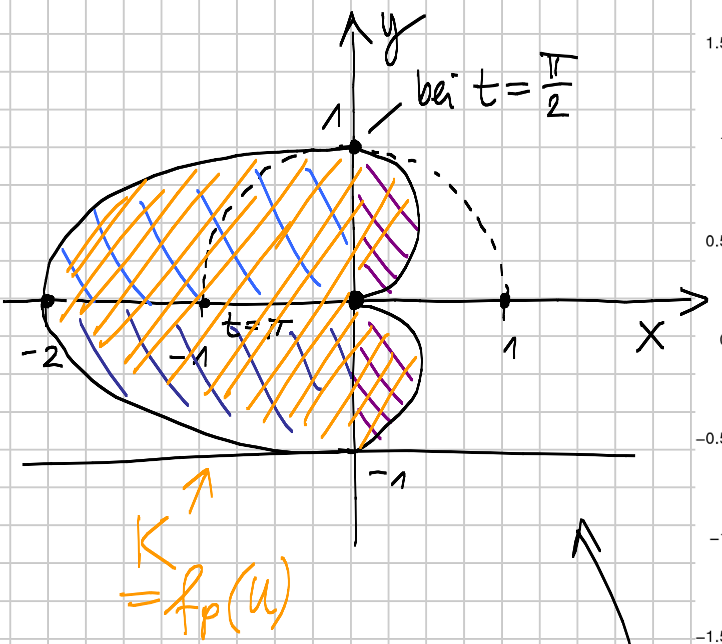
$$= \int_{-1}^{1} \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} x^4\right] dx = \left[\tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{10} x^5\right]_{-1}^{1}$$

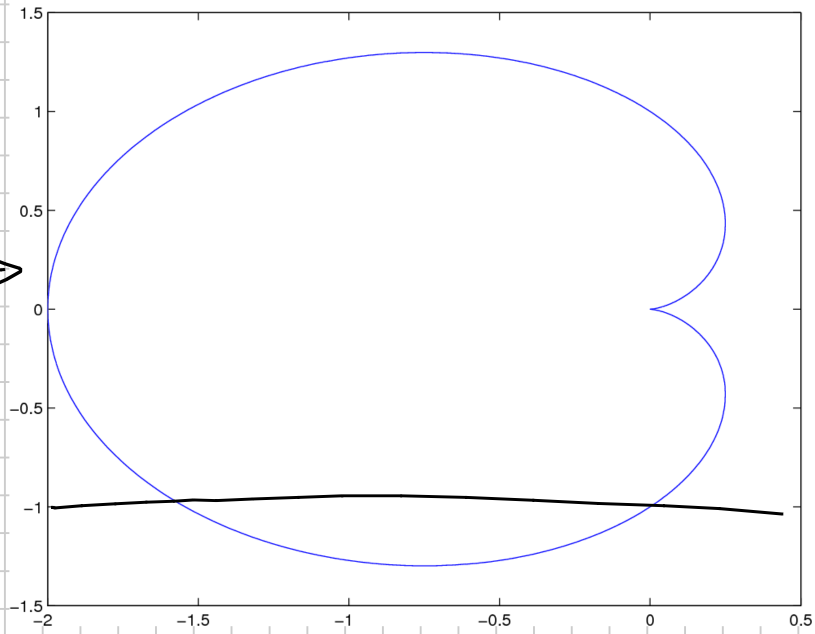
$$= \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10}\right] = \underline{\underline{\tfrac{4}{5}}}$$

Aufgabe 8.3 (3 Punkte) Die Kurve K sei das Bild der Abbildung

$$k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1 - \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \qquad k(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

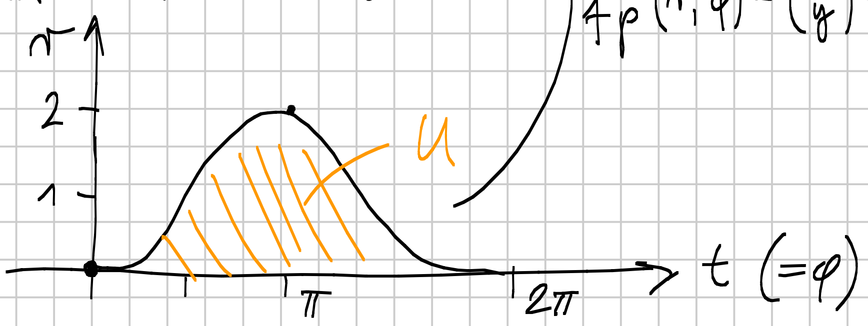
Skizzieren Sie K und berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve K berandet wird. Hinweis: Polarkoordinaten!

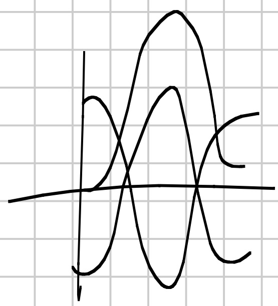




In Polarkoordinaten:

$$f_P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$





Transformationsformel:

$$\underbrace{\int_{f_P(U)=K} g(x,y)\,dx\,dy}_{=\text{Fläche von } K} = \int_U g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, dr\, d\varphi$$

$$\text{Fläche von } K = \int_{f_P(U)} 1 \, dx\,dy \overset{\text{Tr}}{=} \int_U 1 \; r \, dr\, d\varphi$$

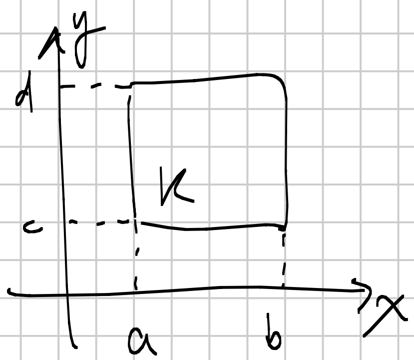
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\varphi} 1 \; r \, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{1-\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)^2 \, d\varphi$$

$$= \ldots = \underline{\underline{2\pi}}$$

(benutze $\underline{\underline{\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}}$ o. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

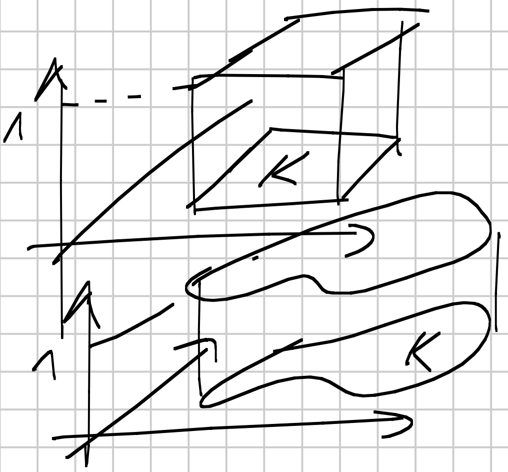


$$\int_K g(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d g(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \text{Fläche von } K$$

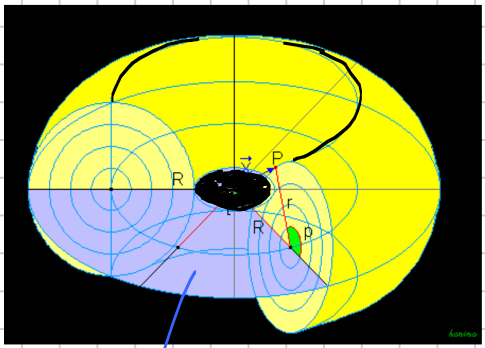
$$= (b-a)(d-c)$$

für $\underline{\underline{g(x,y) = 1}}$.



Aufgabe 8.4 (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen des *Torus*

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3 \right)^2 + z^2 \le 1 \right\}.$$

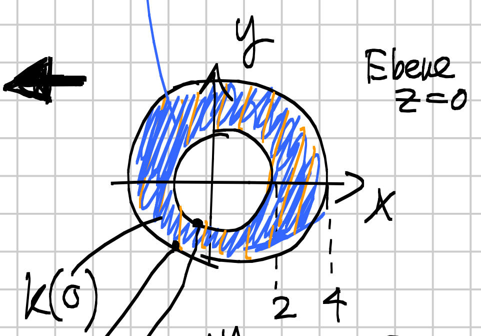


$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \le 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \le 1 - z^2$$

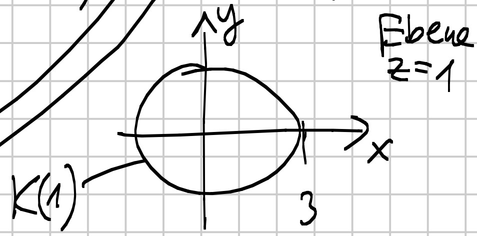
$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} - 3 \le \sqrt{1-z^2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{1-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3 + \sqrt{1-z^2}$$



Für $z=0$: $\quad 2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4$

Für $z=1$: $\quad 3 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$



Fläche eines Querschnitts $K(z)$:

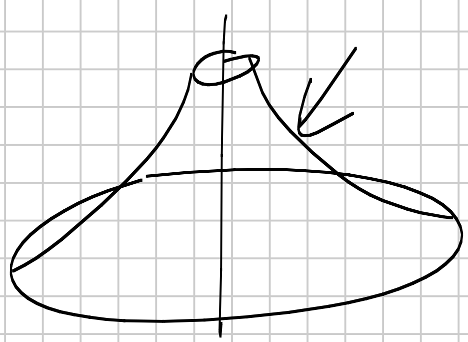
Fläche$(K(z))$ = Fläche des äußeren Kreises
− Fläche des inneren Kreises

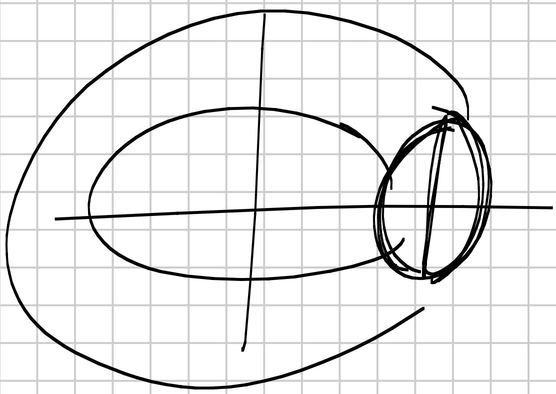
$$= \left(3+\sqrt{1-z^2}\right)^2 \pi - \left(3-\sqrt{1-z^2}\right)^2 \pi = 12\pi\sqrt{1-z^2}$$

$$\text{Volumen des Torus} = \int_{-1}^{1} \text{Fläche}(K(z))\,dz$$

Subst. $z = \sin\alpha$ $\quad dz = \cos\alpha\, d\alpha$

$$= \int_{-1}^{1} 12\pi\sqrt{1-z^2}\,dz = 12\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha\, d\alpha = \underline{\underline{6\pi^2}}$$

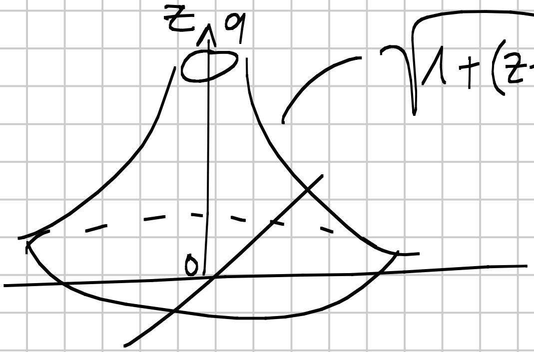




Aufgabe 8.5 (3 Punkte) Es sei

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 + (z-9)^2, 0 \leq z \leq 9\}.$$

Skizzieren Sie die Menge K und berechnen Sie ihr Volumen.



$\sqrt{1+(z-9)^2}$

$$\text{Volumen} = \int_0^9 \left(1+(z-9)^2\right) \pi \, dz$$

$$= \ldots = \underline{\underline{\pi \cdot 9 \cdot 28}}$$