Analysis II für LB – Übungsblatt 7

Notiztitel 19.01.2006

7.1 (i) $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn („Polarkoordinaten"):

$$e^x \neq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

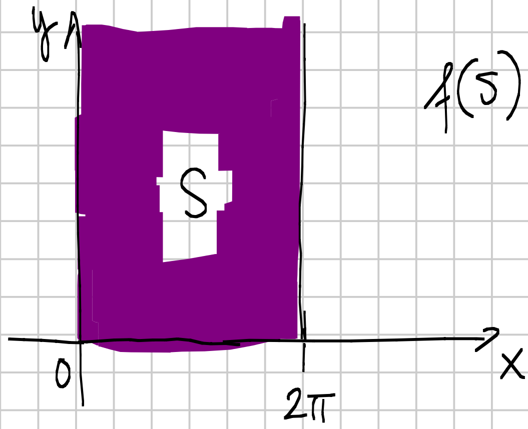
und sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, setze $x = \log \sqrt{a^2+b^2}$

$$(a,b) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \Rightarrow a^2 + b^2 = (e^x)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = e^x$$

Dann ist $\left\| \frac{1}{e^x}(a,b) \right\| = 1$ und damit y der Winkel dieses Vektors („in Polarkoordinaten").

(ii) $$Df(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

$\det Df(x,y) = e^x \cos^2 y + e^x \sin^2 y = e^x \neq 0$ für alle x,
d.h. $Df(x,y)$ ist invertierbar für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) 

$f(S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Nein, denn z.B.

$f(0,0) = (1,0) = f(0, 2\pi)$.

7.2 Sei also $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0^2 + y_0^2 = 1$ gegeben, d.h.
$x_0^2 = 1 - y_0^2$, eingesetzt:

$$3(1-y_0^2)y_0 + y_0^3 + (1-y_0^2)^3 =: C$$

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen für die Funktion $F(x,y) = 3x^2y + y^3 + x^6 - c$

Es gilt $F(x_0, y_0) = 0$ (so haben wir c gewählt).
Wir möchten nun sicherstellen, dass es eine Funktion $y(x)$ gibt, so dass $F(x, y(x)) = 0$ (in einer Umgebung von (x_0, y_0)).
Voraussetzung im Satz ist: $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2+y^2)$$

Also gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 3 \neq 0$.
Damit ist der Satz über implizite Fkt'n anwendbar und liefert die Existenz einer Funktion $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $F(x, y(x)) = 0$.

Zur Bestimmung von $y'(x_0)$:
Dazu gehen wir von der Gleichung $\underline{F(x, y(x)) = 0}$ aus und differenzieren auf beiden Seiten:

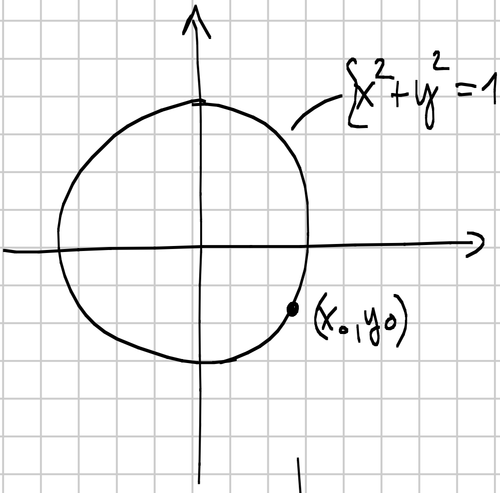
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0 \qquad (1)$$

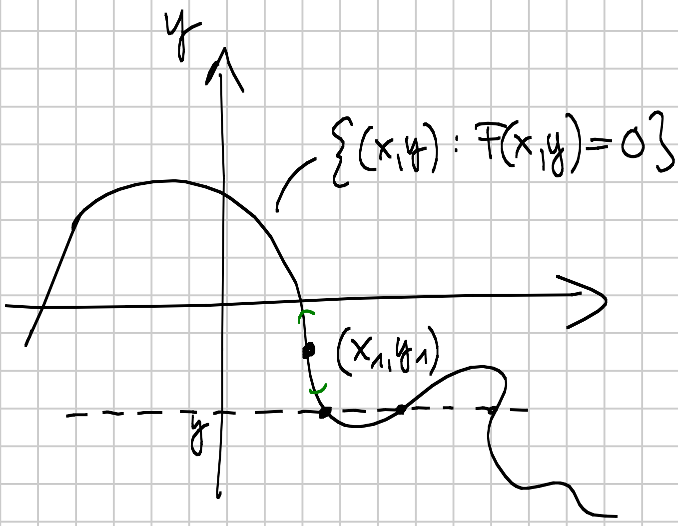
$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 6xy + 6x^5$, also folgt aus (1):

$$y'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{6xy + 6x^5}{-3(x^2+y^2)}$$

also $y'(x_0) = -x_0 y_0 - 3x_0^5 = -x_0(1-x^2) - 3x_0^5$.

$$3x^2y + y^3 + x^6 - c = 0, \qquad c \in \mathbb{R}$$

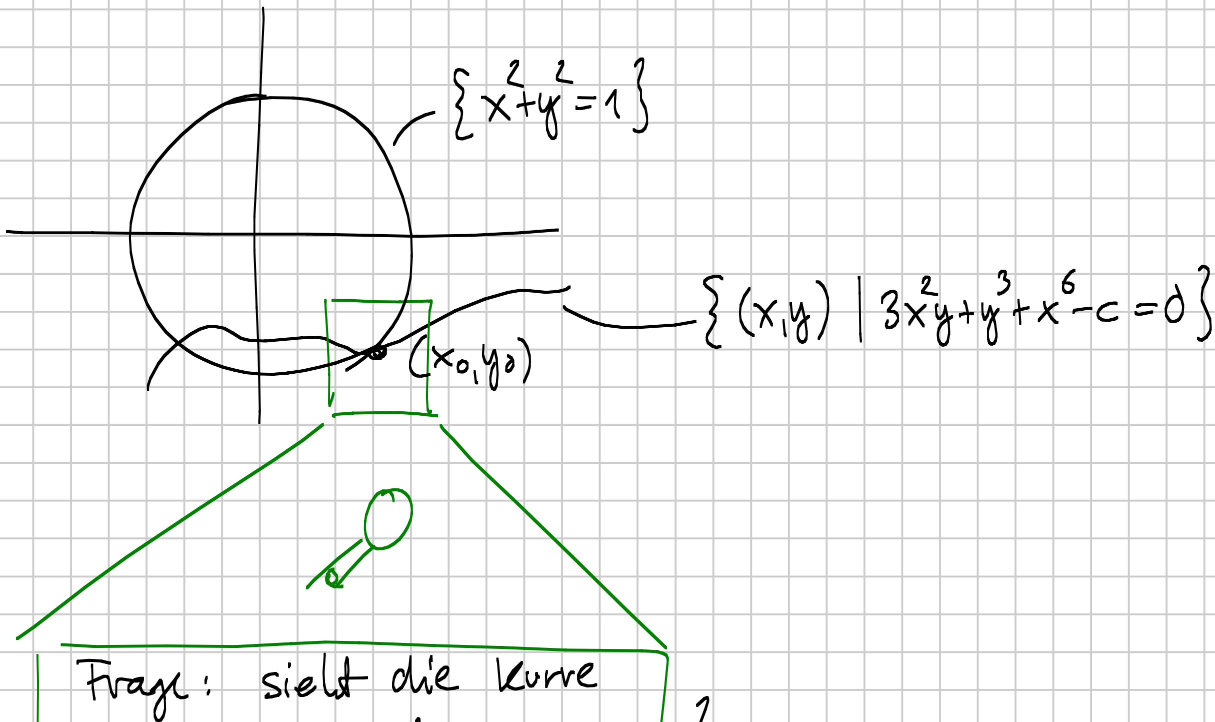




berechne c

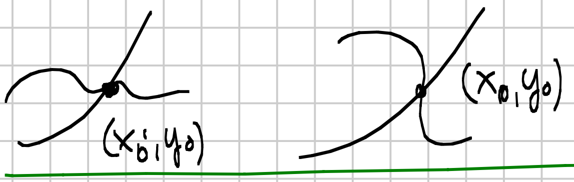
$y=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{c}$

$y=1 \Rightarrow 3x^2 + x^6 - c + 1 = 0$



Frage: sieht die Kurve

so oder so aus?



Aufgabe 7.3 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = \frac{e^y}{1 + x^2} + y.$$

Weisen Sie nach, dass in einer Umgebung U von $x = 0$ lokal eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ und

$$f(x, g(x)) = 1 \leftarrow$$

definiert ist. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von g mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

7.3 $f(0,0) = 1$, betrachte $F(x,y) = f(x,y) - 1$.

Für den Satz über implizite Funktionen müssen wir überprüfen, ob $F_y(0,0) \neq 0$ ist:

$$F_y(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + 1 \Rightarrow F_y(0,0) = 2 \neq 0$$

Aus dem Satz über implizite Fkt. folgt also, dass es in einer Umgebung von $x=0$ eine Funktion $g(x)$ mit $g(0)=0$ gibt, so dass $F(x,g(x)) = 0$, d.h.

$$f(x,g(x)) = 1.$$

Allgemeine Form des Taylorpolynoms 2. Grades:

$$p_g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2$$

$$p_g(0+h) = \underbrace{g(0)}_{=0} + g'(0)h + \frac{1}{2}g''(0)h^2$$

Zur Bestimmung von $g'(0)$ und $g''(0)$:

$$f(x,g(x)) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))\,g'(x) = 0 \qquad (1)$$

$$f_x(x,y) = -e^y(1+x^2)^{-2}\,2x$$

$$f_y(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + 1$$

Damit $$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}, \quad g'(0) = 0$$

Zur Bestimmung von $g''(0)$ leiten wir (1) nochmals ab:
(ohne das Argument $(x,g(x))$):

$$f_{xx} + f_{xy}\, g' + f_y\, g'' + f_{yx}\, g' + f_{yy}\,(g')^2 = 0 \qquad (2)$$

$$f_{xx} = 2e^y(1+x^2)^{-3}(2x)^2 - 2e^y(1+x^2)^{-2}, \quad f_{xx}(0,0) = -2$$
$$f_{xy} = -e^y(1+x^2)^{-2}\,2x, \quad f_{xy}(0,0) = 0$$
$$f_{yy} = \frac{e^y}{1+x^2}, \quad f_{yy}(0,0) = 1$$

d.h. wir erhalten aus (2):

$$-2 + 0\cdot g'(0) + 2\cdot g''(0) + 0\cdot g'(0) + 1\cdot\underbrace{(g'(0))^2}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{g''(0) = 1}}$$

und damit erhalten wir die Taylorentwicklung:

$$P_g(h) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot h^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}h^2}}$$

7.4 (i)
$$Df(u,v) = \begin{bmatrix} 2u\sin v & u^2\cos v \\ 2u\cos v & -u^2\sin v \end{bmatrix}$$

Es ist $\det Df(u,v) = -2u^3\sin^2 v - 2u^3\cos^2 v$
$= -2u^3 \neq 0$ in G.

(ii) Da $\sin\pi = 0$ und $\cos\pi = -1$, folgt $f(2,\pi) = (0,-4)$, es ist also
$$Df^{-1}(0,-4) = \left(Df(2,\pi)\right)^{-1}.$$
Nun ist $Df(2,\pi) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, also

$$Df^{-1}(0,-4) = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$