Analysis III für LB, Übungsblatt 6 — Musterlösung

Notiztitel 11.01.2006

6.1 Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\nabla f(v) = \lambda \nabla g(v) \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

also

$$\begin{bmatrix} 3yz \\ 3xz \\ 3xy \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 6yz = 2xz = xy \Rightarrow x = 3y$ und $z = \frac{1}{2}y$

eingesetzt in g: $0 = 9y - 1$, also $y = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{18}$.

6.2. Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\nabla f(v) = \lambda_1 \nabla g(v) + \lambda_2 \nabla g(v),$$

also

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ y/2 \\ 2z \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$ ist offenbar nicht möglich. Es sei also $\lambda_1 \neq 0$, dann folgt

$$x = \frac{\lambda_2 - 1}{-2\lambda_1}, \; y = 2\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1}, \; z_0 = \frac{\lambda_2 + 1}{2\lambda_1}.$$

Mit $g_2(v) = 0$ folgt $6\lambda_2 - 5 + 1 = 2\lambda_1$, also

$$\lambda_1 = \frac{6\lambda_2 - 4}{2}$$

und mit $g_1(v)=0$ folgt schließlich

$$-30\lambda_2^2+40\lambda_2-10=0,$$

also

$$\lambda_2=\begin{cases}+\frac{1}{3}\\+1\end{cases},\quad \lambda_1=\pm 1 .$$

Damit erhält man zwei Extrema

$$v^1=(x_0^1,y_0^1,z_0^1)=\frac{1}{3}(-1,4,-2)\quad \text{mit } f=-\frac{7}{3} \text{ und}$$

$$v^2=(x_0^2,y_0^2,z_0^2)=(0,0,1)\quad \text{mit } f=1,$$

v^1 ist also das globale Minimum, v^2 das globale Max.

6.3. Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$$

mit $g(x,y)=x^2+y^2-xy-1=0$, also

$$\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2x-y\\2y-x\end{bmatrix}\qquad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

$\lambda=0$ ist offenbar nicht möglich, sei also $\lambda\neq 0$.
Aus $y=2x$ folgte $y=0$ und damit $x=0$, was nicht möglich ist, ebenso ist $x=2y$ unmöglich. (1)/(2) ergibt

$$\frac{y}{x}=\frac{2x-y}{2y-x}\quad\Rightarrow 2y^2-xy=2x^2-xy$$
$$\Rightarrow y=\pm x$$

1. Fall: $x=y \Rightarrow x^2=1$, also $x=\pm 1$, $\lambda=-1$

2. Fall: $x=-y \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\lambda=-\frac{1}{3}$

Wir erhalten also 4 kritische Punkte und es ist

$$f(\pm 1, \pm 1) = 1 > -\frac{1}{3} = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Die globalen Maxima sind also $(1,1)$ und $(-1,-1)$, die globalen Minima $(1/\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

6.4 a) siehe Vorlesung

b) Es ist $f(0,0) - 1 = 0$ und

$$f_y(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + 1,$$

also $f_y(0,0) = 2$. Damit gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion g, die auf einer Umgebung U der 0 definiert ist mit $f(x, g(x)) - 1 = 0$ und $g(0) = 0$.

6.5. Die Menge $\{f = 0\}$ ist eine Kurve, nämlich gegeben durch die Funktion

$$c(x) = \left(x, \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right), \quad x \in (1, \infty).$$

Eingesetzt in h ergibt sich

$$\tilde{h}(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\tilde{h}'(x) = 1 + \frac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$\tilde{h}'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$h''(\sqrt{2}) > 0$, also (globales!) Minimum.

Darüberhinaus gilt ~~h~~ $\lim_{x\to 1} \tilde{h}(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \tilde{h}(x) = \infty$, d.h. die Funktion besitzt kein Maximum.

6.6. Notwendige Bedingung für Extrema:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z),$$

also
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist $\lambda_2 = 0$ nicht möglich, sei also $\lambda_2 \neq 0$. Damit erhalten wir

$$x = \frac{2-\lambda_1}{2\lambda_2}, \quad y = \frac{-3-\lambda_1}{2\lambda_2}, \quad z = \frac{7-\lambda_1}{2\lambda_2}.$$

Mit der Ebenengleichung folgt nun

$$2-\lambda_1 - 3 - \lambda_1 + 7 - \lambda_1 = 0, \quad \text{also } \lambda_1 = 2.$$

Eingesetzt in die Kugelgleichung erhält man

$$0 + \frac{25}{4\lambda_2^2} + \frac{25}{4\lambda_2^2} = 5 \implies \lambda_2^2 = \frac{10}{4}.$$

Wir erhalten als kritische Punkte

$$P_1 = \left(0, -\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } P_2 = \left(0, \frac{5}{\sqrt{10}}, -\frac{5}{\sqrt{10}}\right)$$

mit $f(P_1) = 5\sqrt{10}$ und $f(P_2) = -5\sqrt{10}$.