Analysis III für LB, Übungsblatt 4 – Musterlösung

4.1

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h^3}{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^3}{h^3} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 \cos h^3}{3h^2} = \underline{\underline{1}}$$

Regel von de l'Hospital

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

Damit ist f insbesondere in $(0,0)$ partiell differenzierbar.

4.2 • Sei $g(t) = t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, dann ist $f(x,y) = g(x)+g(y)$ für $xy \neq 0$.
Es ist $g'(t) = 2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) + t^2\cos\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ für $t \neq 0$, stetig.
Damit ist $f_x(x,y) = g'(x)$ und $f_y(x,y) = g'(y)$ und beide partiellen Ableitungen sind stetig (für $xy \neq 0$).
Also ist für $xy \neq 0$ auch f differenzierbar (Satz 2.2).

• Sei nun $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ (anderer Fall analog): es ist
$f_x(x_0,0) = g'(x_0)$ und

$$f_y(x_0,0) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0,h_2)-f(x_0,0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} \frac{\cancel{g(x_0)} + g(h_2) - \cancel{g(x_0)}}{h_2}$$

$$= \lim_{h_2\to 0} \frac{h_2^2 \sin\left(\frac{1}{h_2}\right)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} h_2 \sin\left(\frac{1}{h_2}\right) = \underline{\underline{0}}$$

Es ist also $\nabla f(x_0,0) = (g'(x_0), 0)$. Wir prüfen die Definition der Differenzierbarkeit nach; $h = (h_1, h_2)$:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{f(x_0+h_1, 0+h_2) - \left[f(x_0,0) + \nabla f(x_0,0)\, h\right]}{\|h\|} \right|$$

$$= \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(x_0+h_1) + g(h_2) - g(x_0) - (g'(x_0),0)\,h}{\|h\|} \right|$$

$$= \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(x_0+h_1) + g(h_2) - g(x_0) - g'(x_0)\,h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right|$$

$$= \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(x_0+h_1) - [g(x_0) + g'(x_0)\,h_1] + g(h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecks-ungleichung

$$\leq \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(x_0+h_1) - [g(x_0) + g'(x_0)\,h_1]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| + \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right|$$

$$\leq \underbrace{\lim_{h_1\to 0} \left| \frac{g(x_0+h_1) - [g(x_0) + g'(x_0)\,h_1]}{h_1} \right|}_{=0,\ \text{da } g \text{ diffbar für } x_0 \neq 0} + \underbrace{\lim_{h_2\to 0} \left| \frac{g(h_2)}{h_2} \right|}_{=0,\ \text{s.o.}}$$

also ist f in $(x_0,0)$ differenzierbar.

- Für $x=y=0$ ergibt sich analog:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - [f(0,0) + \nabla f(0,0)\,h]}{\|h\|} \right|$$

$$= \lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{g(h_1) + g(h_2) - 0 - (0,0)\,h}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right|$$

$$\leq \lim_{h_1\to 0} \left| \frac{g(h_1)}{h_1} \right| + \lim_{h_2\to 0} \left| \frac{g(h_2)}{h_2} \right| = 0,$$

also ist f in 0 differenzierbar.

4.3 $\rightarrow$ später

4.4. $\nabla f(x,y) = (2x-y-1,\ 2y-x)$

Extrema: $\nabla f(x,y) \overset{!}{=} 0 \iff \begin{aligned} 2x-y-1&=0 \\ 2y-x&=0 \end{aligned}$

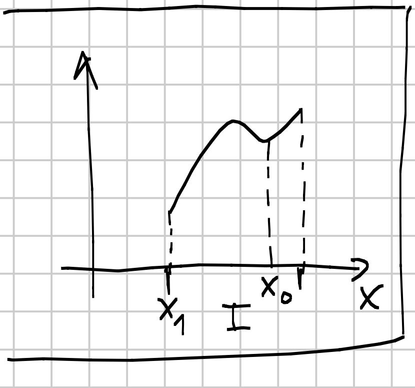
$\iff \begin{aligned} x&=2y \\ 4y-y-1&=0 \end{aligned}$

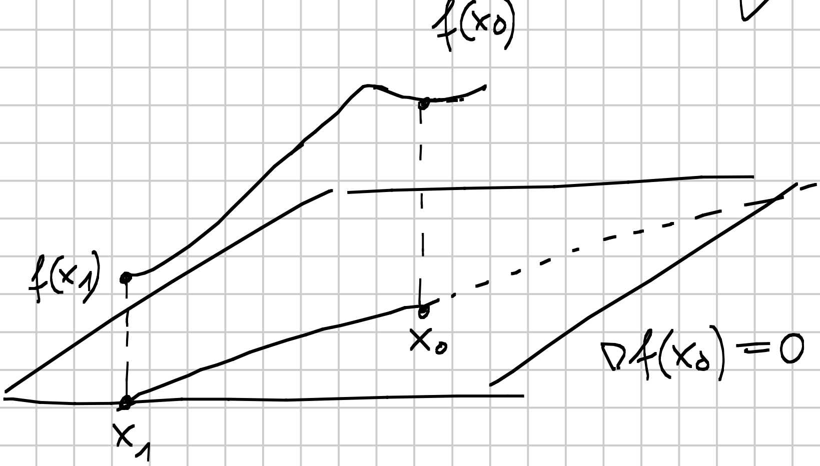
$\iff \begin{aligned} y&=\frac{1}{3} \\ x&=\frac{2}{3} \end{aligned}$

Hesse-Matrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(H_f(x,y)) = 3 > 0$, $f_{xx}(x,y) = 2 > 0$, also ist $H_f(x,y)$ positiv definit (sogar für alle (x,y)!).
Damit ist $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ein (lokales) Minimum.

Zur Bestimmung des Maximums (und des globalen ~~Minimums~~)





$\Rightarrow$ damit ist $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ das <u>globale</u> Minimum.

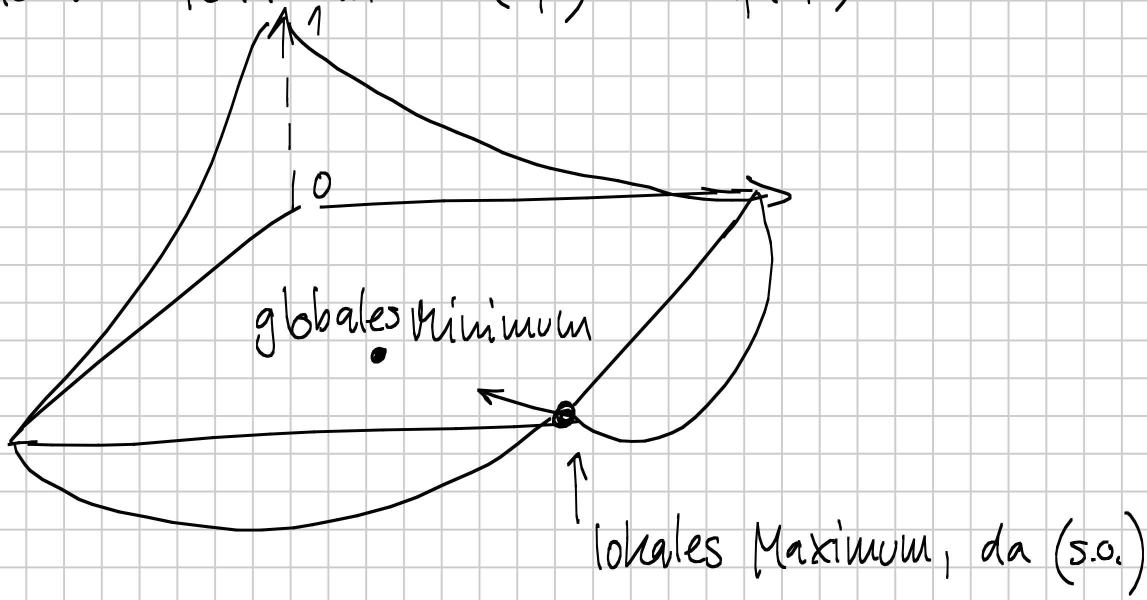
Wir betrachten f auf dem Rand:

1. $\{0\} \times [0,1]$: $f(0,y) = y^2$, also $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$
2. $\{1\} \times [0,1]$: $f(1,y) = y^2 - y$, $f(1,0) = 0$, $f(1,1) = 0$

für $y \in]0,1[$ ist $f(1,y)$ kleiner als 0.

3. $[0,1] \times \{0\}$: $f(x,0) = x^2 - x \to$ analog 2.
4. $[0,1] \times \{1\}$: $f(x,1) = x^2 - 2x + 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 0$
   dazwischen ist f monoton fallend.

$\Rightarrow$ globales Maximum in $(0,1)$ mit $f(0,1) = 1$.



4.5 Wir überprüfen die Definition.

$$\lim_{h \to 0} \frac{fg(0+h,0) - fg(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)\,g(0+h,0) - f(0,0)g(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)\,g(0+h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(0+h,0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h,0)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} f(0+h,0)}_{\text{ex. weil } f \text{ stetig}} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h,0) - g(0,0)}{h}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

weil g part. diffbar in der 1. Var

g