Analysis III für LB, Übungsblatt 10 (incl. Lösungen)

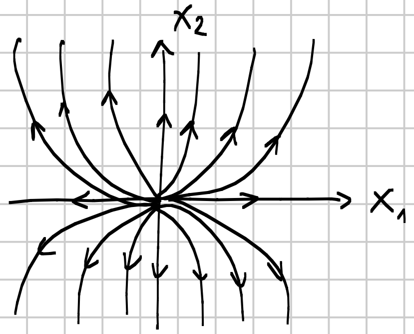
Notiztitel 27.02.2006

10.1 Skizzieren sie die Phasenportraits (d.h. einige typische Lösungskurven im $\mathbb{R}^2$) der autonomen Differentialgleichungssysteme $x' \overset{!}{=} Ax$ für die drei Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

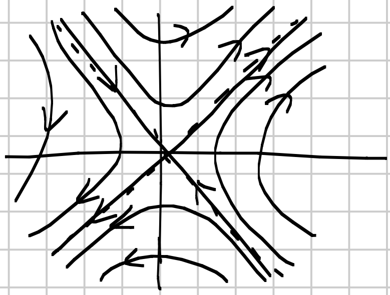
Lösung:

A_1 :

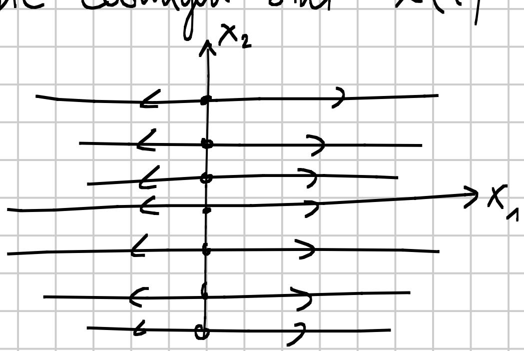


A_2 : Eigenwerte von A : $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$,

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



A_3 : Die Lösungen sind $x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,



10.2 Bestimmen Sie alle Lösungen des DGL-Systems

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x =: Ax$$

Lösung: charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3$.
Somit ist 1 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3.
Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist zwei.
Daraus ergeben sich zwei linear unabhängige Lösungen:

$$x_1(t) = v_1 e^t \quad \text{und} \quad x_2(t) = v_2 e^t$$

Ansatz für eine dritte, dazu linear unabhängige Lösung:

$$x_3(t) = wte^t + ze^t, \qquad w, z \in \mathbb{R}^3.$$

Einsetzen liefert

$$we^t + wte^t + ze^t = Awte^t + Aze^t,$$

also

$$w = Aw \quad \text{und} \quad w + z = Az \; (\Leftrightarrow (A - I)z = w)$$

also $w = av_1 + bv_2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ und somit

$$(A - I)z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich als Lösungen etwa $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

10.3. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}, \quad x > -1, \; y > 0$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ und bestimmen Sie das maximale

Lösungsintervall.

Lösung: Die DGL umgeformt:

$$y\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \quad , \; x>-1,\; y>0.$$

Integration auf beiden Seiten.

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + c$$

Bestimmung von c durch Anfangsbedingung

$$\frac{1}{2}(y(0))^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\ln 1 + c = c$$

Damit gilt wegen $y>0$ folgende Lösung.

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}\ln(1+x^3)+1},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ so zu wählen ist, dass $\frac{2}{3}\ln(1+x^3)+1 \geq 0$, also

$$\ln(1+x^3) \geq -\frac{3}{2}$$

bzw.

$$1+x^3 \geq e^{-\frac{3}{2}}$$

und damit

$$x \geq \left(e^{-\frac{3}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

Maximales Lösungsintervall: $\left[\left(e^{-\frac{3}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}, \infty\right[$

10.4 a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 4xy \; ?$$

Skizzieren Sie die Graphen der Lösungsfunktionen.

b) Geben Sie die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = 4xy + (1-x)e^{4x}$$
$$y(1) = 0$$

Lösung: a) Für $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = 4x \quad , \quad \int \frac{dy}{y} = \int 4x \, dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2x^2 + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{2x^2+c} = e^c e^{2x^2} = Ce^{2x^2}$$

Für $y=0$ ist die Konstante Funktion ebenfalls eine Lösung, mit $C=0$ in der obigen Formel enthalten.

b) Variation der Konstanten:

$$y = \varphi(x)\, e^{2x^2}$$

$$y' = \varphi'(x) e^{2x^2} + \varphi(x)\, 4x e^{2x^2} = 4xy + (1-x)e^{4x}$$
$$= 4x\varphi(x)\, e^{2x^2} + (1-x)e^{4x}$$

Daher $\varphi'(x)e^{2x^2} = (1-x)e^{4x}$

bzw. $\varphi'(x) = (1-x)\, e^{4x-2x^2}$

$$\varphi(x) = \int (1-x)e^{4x-2x^2} \, dx$$

Substitution $u = 4x-2x^2$, $du = (4-4x)\,dx = 4(1-x)\,dx$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\int e^u \, du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{4x-2x^2} + C$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$f(x) = \varphi(x)e^{2x^2} = \left(\frac{1}{4}e^{4x-2x^2} + C\right)e^{2x^2}$$
$$= \frac{1}{4}e^{4x} + Ce^{2x^2}$$

$$0 = f(1) \Rightarrow C = -\frac{e^2}{4}$$