HANDOUT #3
STIELTJES-TRANSFORMATION VON MASSEN

FOLKMAR BORNEMANN

Die Stieltjes-Transformierte eines Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}_{\leqslant 1}$ ist die komplexe Funktion[1]

$$S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(dx)}{x-z} \qquad (z \in \mathbb{H}).$$

Es ist $S_\mu \equiv 0$ genau dann, wenn $\mu = 0$ (d.h. die Transformation ist *injektiv*). Für $\mu \neq 0$ sieht man leicht, dass $S_\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine *holomorphe* Funktion ist, welche

$$|S_\mu(z)| \leqslant \frac{\mu(\mathbb{R})}{|\operatorname{Im} z|} \qquad (z \in \mathbb{H})$$

erfüllt. Hieraus folgt, dass $S_\mu(z) = -\mu(\mathbb{R})z^{-1} + o(z^{-1})$ gleichmäßig für $z \to \infty$ in jedem Sektor $|\arg z - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \delta$ mit einem $\delta > 0$. Umgekehrt ist nach dem Herglotz'schen Darstellungssatz für positive harmonische Funktionen jede holomorphe Funktion $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit einer solchen Asymptotik die Stieltjes-Transformierte eines Sub-W-Maßes $\mu \neq 0$.

Aus der Funktion $S_\mu(z)$ lässt sich μ sehr einfach rekonstruieren; ein Ergebnis, das mit der Plemelj'schen Formel der Potentialtheorie eng verwandt ist.

Satz 1 (Rekonstruktionssatz). *Für eine positive Folge $\epsilon \to 0$ gilt*

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} S_\mu(x + i\epsilon)\, dx \xrightarrow{w} \mu.$$

Die punktweise Konvergenz von Stieltjes-Transformierten ist äquivalent zur vagen Konvergenz von Maßen. Das folgt im wesentlichen aus dem Helly'schen Auswahlsatz und der eindeutigen Charakterisierbarkeit holomorpher Funktionen auf $\mathbb{H}$ durch ihre Werte auf einer Folge $z_j \to z_0 \in \mathbb{H}$ ($z_j \neq z_0$).

Satz 2. *Es sei μ_n eine Folge von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *Aus $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ folgt $S_{\mu_n}(z) \to S_\mu(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.*
(ii) *Wenn $S_{\mu_n}(z) \to S(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$, so ist $S = S_\mu$ und $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.*

Zur Erinnerung: Gilt $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ und ist μ ein W-Maß, so gilt sogar $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Dieser Satz lässt sich auf eine Folge von Zufallsmaßen „liften“:

Satz 3. *Es sei $\mu_n(\omega)$ eine Folge zufälliger W-Maße auf $\mathbb{R}$, parametrisiert durch ω aus einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ferner sei μ ein (deterministisches) W-Maß auf $\mathbb{R}$. Konvergiert*

$$S_{\mu_n(\omega)}(z) \to S_\mu(z) \qquad (z \in \mathbb{H})$$

für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher (stochastisch, nach Erwartungswert), so konvergiert auch

$$\mu_n(\omega) \xrightarrow{w} \mu$$

$\mathbb{P}$-fast sicher (stochastisch, nach Erwartungswert).

Date: 10. Juni 2010.

[1] $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ bezeichnet die obere komplexe Halbebene.