Multiskalenanalyse

Im Rahmen des Seminars »Wavelet Analysis«

Gabriel Cordes

15.11.2012

1 Orthonormale Systeme von Translationen

Definition 1.1 (Orthonormalsystem von Translationen)**.** *Ein Orthonormalsystem auf* $\mathbb{R}$ *der Form* $\{T_n g(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *mit* $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *heißt ein Orthonormalsystem von Translationen.*

Bemerkung 1.2. *Ist die Folge* $\{T_n g(x)\}$ *ein Orthonormalsystem von Translationen, so ist sie nach Definition eine Orthonormalbasis des Unterraumes* $\overline{span}\{T_n g(x)\}$.
Anders ausgedrückt:

$$\overline{span}\{T_n g(x)\} \quad = \quad \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad f(x) = \sum_n \langle f, T_n g\rangle\, T_n g(x) \right\}$$

Lemma 1.3. *Die Familie* $\{T_n g(x)\}$ *ist ein Orthonormalsystem von Translationen*

$$\Longleftrightarrow \qquad \forall \gamma \in \mathbb{R} : \sum_n \left|\hat{g}(\gamma + n)^2\right| = 1$$

Lemma 1.4. *Sei* $\{T_n g(x)\}$ *ein Orthonormalsystem von Translationen. Dann gilt:*

$$f(x) \in \overline{span}\,\{T_n g(x)\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \ell^2\, Folge\, \{c(n)\} : \hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma) \left(\sum_n c(n) e^{-2\pi i n \gamma} \right)$$

Lemma 1.5. *Sei* $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *mit kompaktem Träger. Falls das System* $\{T_n g(x)\}$ *die Bedingung*

$$\exists A, B \geq 0 : \forall \gamma \in \mathbb{R} : A \leq \sum_n |\hat{g}(\gamma + n)|^2 \leq B$$

erfüllt, dann gibt es eine Funktion $\tilde{g}(x) \in L^2(\mathbb{R})$, *für die gilt:*

(a) $\{T_n \tilde{g}(x)\}$ *ist ein Orthonormalsystem von Translationen*

(b) $\overline{span}\{T_n g(x)\} = \overline{span}\{T_n \tilde{g}(x)\}$

2 Definition einer Multiskalenanalyse

Definition 2.1 (Multiskalenanalyse). *Eine Multiskalenanalyse auf* $\mathbb{R}$ *ist eine Folge von Unterräumen* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *von Funktionen in* $L^2(\mathbb{R})$*, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) $\forall j \in \mathbb{Z}: \quad V_j \subseteq V_{j+1}$

(b) $f(x) \in C_c^0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \overline{span}\,\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$

(c) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

(d) $f(x) \in V_0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_{2^j} f(x) \in V_j$

(e) es gibt eine Funktion $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$*, Skalierungsfunktion genannt, so dass die Familie* $\{T_n\varphi(x)\}$ *ein Orthonormalsystem von Translationen ist und* $V_0 = \overline{span}\,\{T_n\varphi(x)\}$

Bemerkung 2.2. *Üblicherweise wird eine Multiskalenanalyse definiert, indem man zunächst einen passenden Unterraum* V_0 *bestimmt und dazu*

$$V_j := \{f(x) \quad | \quad \exists g(x) \in V_0 : f(x) = D_{2^j} g(x)\} = \left\{f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad D_{2^{-j}} f(x) \in V_0\right\}$$

definiert. Nun bleibt noch zu zeigen, dass Definition 2.1 (a), (b), (c) *und* (e) *gelten.*

Von nun an sei V_j eine Multiskalenanalyse mit Skalierungsfunktion $\varphi(x)$.

Definition 2.3. *Für jedes* $j, k \in \mathbb{Z}$ *ist* $\varphi_{j,k}$ *definiert als* $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) = D_{2^j} T_k \varphi(x)$

Definition 2.4 (Approximationsoperator). *Für jedes* $j \in \mathbb{Z}$ *ist der Approximationsoperator* P_j *auf Funktionen* $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *definiert als* $P_j f(x) = \sum\limits_k \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}(x)$

Definition 2.5 (Detailoperator). *Für jedes* $j \in \mathbb{Z}$ *ist der Detailoperator* Q_j *auf Funktionen* $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *definiert als* $Q_j f(x) = P_{j+1} f(x) - P_j f(x)$

Lemma 2.6. *Für jedes* $j \in \mathbb{Z}$ *ist* $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *eine Orthonormalbasis für* V_j.

Lemma 2.7. *Für alle* $f(x) \in C_c^0(\mathbb{R})$ *gilt:*

(a) $\lim\limits_{j\to\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$

(b) $\lim\limits_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0$

Lemma 2.8. *Es gibt eine* ℓ^2 *Folge von Koeffizienten* $\{h(k)\}$*, so dass gilt:*

$$\varphi(x) = \sum_k h(k) 2^{1/2} \varphi(2x - k) \tag{1}$$

in $L^2(\mathbb{R})$*. Des Weiteren definieren wir*

$$\hat{\varphi}(\gamma) = m_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{2}$$

mit

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h(k) e^{-2\pi i k\gamma} \tag{3}$$

Definition 2.9. *Sei* $\varphi(x)$ *eine Skalierungsfunktion bezüglich einer Multiskalenanalyse* $\{V_j\}$.
Die Folge $h(k)$*, die* (1) *erfüllt, heißt Skalierungsfilter bezüglich* $\varphi(x)$.
Die Funktion $m_0(\gamma)$ *aus* (3) *heißt die Hilfsfunktion bezüglich* $\varphi(x)$.

3 Beispiele für Multiskalenanalysen

3.1 Die Haar Multiskalenanalyse

V_0 besteht aus allen Stufenfunktionen $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, die auf dem Intervall $I_{0,k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ konstant sind.
Daraus ergibt sich:

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall k \in \mathbb{Z} : f(x) \text{ ist konstant auf } I_{j,k} \right\}$$

Skalierungsfunktion $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$

3.2 Die stückweise lineare Multiskalenanalyse

V_0 besteht aus allen Funktionen $f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, die auf dem Intervall $I_{0,k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ linear sind.
Daraus ergibt sich:

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall k \in \mathbb{Z} : f(x) \text{ ist linear auf } I_{j,k} \right\}$$

Skalierungsfunktion $\varphi(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$

3.3 Die bandbegrenzte Multiskalenanalyse

V_0 besteht aus allen Funktionen $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, die bandbegrenzt sind mit Bandgrenze 1.
Daraus ergibt sich:

$$V_j = \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad f(x) \text{ ist bandbegrenzt mit Bandgrenze } 2^j \right\}$$

Skalierungsfunktion $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

3.4 Die Meyer Multiskalenanalyse

Definition 3.1 (C^k Glockenfunktion)**.** *Sei $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Eine Funktion $b(x) \in C^k(\mathbb{R})$ heißt C^k Glockenfunktion über dem Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, falls folgende Eigenschaften gelten:*

(a) $b(x) = 1 \quad$ *falls* $|x| \leq \frac{1}{3}$

(b) $b(x) = 0 \quad$ *falls* $|x| > \frac{1}{3}$

(c) $0 \leq b(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(d) $\sum\limits_n |b(x+n)|^2 = 1$

Zu gegebenem $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ sei $\varphi(x)$ so gewählt, dass $\hat{\varphi}(\gamma)$ eine C^k Glockenfunktion über dem Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ist. Definiere nun

$$V_0 := \overline{span}\left\{T_n \varphi(x)\right\}$$

Daraus ergibt sich:

$$V_j := \left\{ f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad D_{2^{-j}} f(x) \in V_0 \right\}$$

Die Skalierungsfunktion φ ist über die inverse Fourier-Transformation von

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{falls } |x| < \frac{2\pi}{3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{2\pi}|x| - 1\right)\right) / \sqrt{2\pi}, & \text{falls } \frac{2\pi}{3} \leq |x| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei $v(x) = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20^7$.