Signale und Systeme

Christoph Becker

18.10.2012

Signale

Definition 1. *Ein **Signal** ist eine Folge von Zahlen* $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *welche die Bedingung* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| < \infty$ *erfüllt.*

Definition 2. *Der **Frequenzgang / frequency domain representation** eines Signals x(n) ist die Funktion* $\hat{x}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e^{-2\pi inw} = X(e^{2\pi iw}).X(z) = \hat{x}(\frac{ln(z)}{2\pi i})$

Systeme

Definition 3.

1. *Ein **System** ist eine Abbildung T, welche ein Eingangssignal x(n) einem Ausgangssignal y(n) zuordnet. Man schreibt* $Tx(n) = y(n)$.
2. *Ein System T ist **linear** wenn* $T(ax_1 + bx_2)(n) = aTx_1(n) + bTx_2(n)$
3. *Ein lineares System T ist **stabil** (BIBO-Stabilität), wenn es eine Konstante* $C > 0$ *gibt, so dass für alle Signale x(n),*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |Tx(n)| \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$
4. *Für* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *sei der **Translations Operator** definiert,* τ_{n_0}, *by* $\tau_{n_0}x(n) = x(n - n_0)$
5. *Ein **lineares zeitinvariantes System LZI / (linear time-invariant LTI)** ist ein lineares System T für welches* $T(\tau_{n_0}x)(n) = \tau_{n_0}(Tx)(n) = Tx(n - n_0)$
6. *Die **Faltung** zweier Signale* $x_1(n)$ *und* $x_2(n)$, *geschrieben* $x_1 * x_2(n)$, *ist das Signal y(n) gegeben durch*
$$y(n) = x_1 * x_2(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_1(k)x_2(n-k).$$

Satz 1. *Faltungen sind linear*

1. *Wenn* $x_1(n)$ *und* $x_2(n)$ *Signale sind, dann ist auch* $y(n) = x_1 * x_2(n)$ *ein Signal.*
2. *Für jedes Paar von Signalen* $x_1(n)$ *und* $x_2(n)$, *gilt*
$$(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n)$$
3. *Es seien* $x_1(n)$ *und* $x_2(n)$ *Signale und* $y(n) = (x_1 * x_2)(n)$. *Dann ist* $\hat{y}(w) = \hat{x}_1(w)\hat{x}_2(w)$.

Satz 2. T_h *ist genau dann ein stabiles LTI system, wenn es ein Signal h(n) gibt, so dass* $T_hx(n) = (x * h)(n)$, $\hat{Tx}(w) = \hat{x}(w)\hat{h}(w)$.

Definition 4. *Es sei ein stabiles LTI system T gegeben, das Signal h(n) so dass* $Tx(n) = (x * h)(n)$ *heist* ***Impulsantwort bzw. Gewichtsfunktion / Impulse response*** *von T. Die Impulsantwort eines stabilen LTI systems wird oft Filter genannt. Der Frequenzgang von h(n),* $\hat{h}(w)$*, wird* ***Frequenzantwort / frequence response*** *von T, und die z-Transformierte von h(n), H(z), heißt die* ***Übertragungsfunktion / system function*** *von T.*

Definition 5. *Ein stabiles LTI System ist* ***kausal / causal****, wenn dessen Impulsantwort h(n) die Bedingung h(n) = 0 für* $n < 0$ *erfüllt.*

Definition 6. *Ein System T ist* ***realisierbar / realizable****, wenn die Beziehung zwischen Eingangssignal x(n) und Ausgangssignal y(n) von T durch eine Gleichung der Form*

$$\sum_{k=0}^{K} a(k)y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b(m)x(n-m)$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$ *gegeben ist.*

Satz 3. *Wenn die Übertrangungsfunktion R(z), eines realisierbaren Systems T alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises der komplexen Zahlenebene hat, dann ist T kausal und stabil.*

Wenn T ein realisierbares System ist, folgert man aus Satz 1.3, $(a * y)(n) = (b * x)(n)$, $\hat{a}(w)\hat{y}(w) = \hat{b}(w)\hat{x}(w)$ (Die Anwendung des Satzes ist legitim, da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Folgen mit endlich vielen Folgegliedern ungleich null sind und von daher Signale sind). Umgeformt $\hat{y}(w) = \frac{\hat{b}(w)}{\hat{a}(w)}\hat{x}(w)$. Das Ziel der nachfolgende Rechnung ist die Impulsantwort r(n) zu erhalten. Die Rechnung nimmt den Umweg über die z-Transformierte R(z) von T.

$$R(z) = \hat{r}\left(\frac{\ln(z)}{2\pi i}\right) = \frac{\hat{b}\left(\frac{\ln(z)}{2\pi i}\right)}{\hat{a}\left(\frac{\ln(z)}{2\pi i}\right)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b(n)e^{-2\pi i n\left(\frac{\ln(z)}{2\pi i}\right)}}{\sum_{k=0}^{K} a(n)e^{-2\pi i n\left(\frac{\ln(z)}{2\pi i}\right)}} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b(n)z^{-n}}{\sum_{k=0}^{K} a(n)z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$R(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)*z^N}{A(z)*z^N}$ wobei $N > max(M, K)$. Somit steht sowohl im Zähler als auch im Nenner ein Polynom von Grad N ($a(0) \neq 0$). Dividiert man R(z) anschließend durch z, wird der Grad des Nennerpolynoms um eins größer als der des Zählerpolynoms. Das ist die Vorraussetzung um eine Partialbruchzerlegung durchzuführen.

$$R(z)/z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{A_{i,j}}{(z-p_i)^{j+1}}$$

p_i sind die Nullstellen des Nennerpolynoms von $\frac{R(z)}{z}$ und m_i die Vielfachheit der Nullstelle p_i. Wenn $a \neq 0$, dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-(a/z)} = \frac{z}{z-a}$$

Wenn $|z| > |a|$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{da^j}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right) &= \frac{d^j}{da^j}\frac{z}{z-a} \\
\sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} a^{n-j} z^{-n} &= \frac{j!z}{(z-a)^{j+1}} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} z^{-n} &= \frac{z}{(z-a)^{j+1}} \quad \text{wobei } \binom{n}{j} = 0 \text{ für } j > n
\end{aligned}$$

$$R(z) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{i,j} \frac{z}{(z-p_i)^{j+1}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{i,j} \binom{n}{j} p_i^{n-j} z^{-n}\right)$$

Die Reihe konvergiert, wenn $|z| > max\{|p_i|\}$. Die absolute Konvergenz muss vorausgesetzt werden, damit ich die Summationsreihenfolge vertauschen darf.

$$R(z) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_{i,j} \binom{n}{j} p_i^{n-j} z^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{i,j} \binom{n}{j} p_i^{n-j} \right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^{-n}$$

$$r(n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{i,j} \binom{n}{j} p_i^{n-j}$$

Aus dieser Darstellung von r(n) wird klar, dass T kausal mit Impulsantwort r(n) ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass T stabil ist. Wenn es gelingt zu zeigen, dass r ein Signal ist, so wäre nach Satz 2, T stabil (und ein LTI?).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| \quad \text{konvergiert} \xLeftrightarrow[\text{Summationsreihenfolge}]{\text{Vertauschung der}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| A_{i,j} \binom{n}{j} p_i^{n-j} \right| \quad konvergiert$$

die Anwendung des Quotientenkriteriums liefert für i,j beliebig:

$$\left| \frac{A_{i,j} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} p_i^{n+1-j}}{A_{i,j} \frac{n!}{j!(n-j)!} p_i^{n-j}} \right| = \frac{n+1}{n+1-j} |p_i| \xrightarrow{n \to \infty} |p_i|$$

Wenn $|p_i| < 1$ für alle i, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| < \infty$.

Definition 7. *Die Impulsantwort eines realisierbaren Systems, dessen Übertragungsfunktion keine Polstellen außer möglicherweise bei z = 0 hat, heist* ***finite Impulse response (FIR) Filter*** *und eine Übertragungsfunktion mit Polstellen innerhalb des Einheitskreises heist* ***infinite Impulse response (IIR) Filter****.*

Periodische Signale und die Diskrete Fourier Transfomation

Definition 8. *Es sei x(n) ein Signal mit Periode N gegeben, die (N-Punkte)* ***diskrete Fourier Transformierte*** *von x(n), geschrieben $\hat{x}(n)$, ist die N periodische Folge definiert durch*

$$\hat{x}(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{-2\pi i j n/N}.$$

Definition 9. *Es sei eine N periodische Folge x(n) gegeben mit DFT $\hat{x}(n)$,*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n) e^{2\pi i n j/N}$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Satz 4. *Es seien x(n) and y(n) N periodische Signale, und $\hat{x}(n)$ und $\hat{y}(n)$ die DFTs, dann*

$$(x \hat{*} y)(n) = \hat{x}(n)\hat{y}(n),$$

wobei $(x \hat{*} y)(n)$ die DFT von $x * y(n)$ ist.

Schnelle Fourier-Transformation / Fast Fourier Transform

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N} & e^{-2\pi i2/N} & e^{-2\pi i3/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)/N} & e^{-2\pi i(N-1)/N} \\ 1 & e^{-2\pi 2/N} & e^{-2\pi i4/N} & e^{-2\pi i6/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)2/N} & e^{-2\pi i(N-1)2/N} \\ 1 & e^{-2\pi 4/N} & e^{-2\pi 6/N} & e^{-2\pi i9/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)3/N} & e^{-2\pi i(N-1)3/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i(N-1)/N} & e^{-2\pi i(N-1)2/N} & e^{-2\pi i(N-1)3/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)(N-1)/N} & e^{-2\pi i(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

$\hat{x} = X * x; N = 2 * M$. Ich klammere in den Spalten gerader Numerierung in der 2. Zeile $e^{-2\pi i/N}$ aus, in der 3. $e^{-2\pi i2/N}$, in der 4. $e^{-2\pi i3/N} \dots$.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i2/N} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)/N} & -e^{2\pi i/N}e^{-2\pi i(N-2)/N} \\ 1 & e^{-2\pi i2/N}(1) & e^{-2\pi i4/N} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i4/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)2/N} & -e^{2\pi i2/N}e^{-2\pi i(N-2)2/N} \\ 1 & e^{-2\pi i4/N}(1) & e^{-2\pi i6/N} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i6/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)3/N} & -e^{2\pi i3/N}e^{-2\pi i(N-2)3/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i(N-1)/N}(1) & e^{-2\pi i(N-1)2/N} & e^{-2\pi i(N-1)/N}e^{-2\pi i(N-1)2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)(N-1)/N} & e^{-2\pi i(N-1)/N}e^{-2\pi i(N-2)(N-1)/N} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

In der nächsten Matrix wurde keine Umformung vorgenommen, ich habe lediglich ein paar Zeilen eingefügt.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i2/N} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)/N} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(N-2)/N} \\ 1 & e^{-2\pi i2/N}(1) & e^{-2\pi i4/N} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i4/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)2/N} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i(N-2)2/N} \\ 1 & e^{-2\pi i4/N}(1) & e^{-2\pi i6/N} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i6/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)3/N} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i(N-2)3/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi iM/N}(1) & e^{-2\pi i2M/N} & e^{-2\pi iM/N}e^{-2\pi iM2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)M/N} & e^{-2\pi iM/N}e^{-2\pi i(N-2)M/N} \\ 1 & e^{-2\pi i(M+1)/N}(1) & e^{-2\pi i2(M+1)/N} & e^{-2\pi i(M+1)/N}e^{-2\pi i(M+1)2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)(M+1)/N} & e^{-2\pi i(M+1)/N}e^{-2\pi i(N-2)(M+1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i(N-1)/N}(1) & e^{-2\pi i2(N-1)/N} & e^{-2\pi i(N-1)/N}e^{-2\pi i(N-1)2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)(N-1)/N} & e^{-2\pi i(N-1)/N}e^{-2\pi i(N-1)(N-2)/N} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Im folgendem Umformungsschritt wandle ich folgende Terme ineinander um : $e^{-2\pi i(M+n)/N} = -e^{-2\pi in/N}$ und $e^{-2\pi i(gerade)*(M+n)/N} = e^{-2\pi i(gerade)n/N}$.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i2/N} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)/N} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(N-2)/N} \\ 1 & e^{-2\pi i2/N}(1) & e^{-2\pi i4/N} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i4/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)2/N} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i(N-2)2/N} \\ 1 & e^{-2\pi i4/N}(1) & e^{-2\pi i6/N} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i6/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)3/N} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i(N-2)3/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \boxed{-1} & \dots & 1 & \boxed{-1} \\ 1 & -e^{2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i2/N} & -e^{2\pi i/N}e^{-2\pi i2/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)/N} & -e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(N-2)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{\vdots} & \ddots & \vdots & \boxed{\vdots} \\ 1 & -e^{-2\pi i(M-1)/N}(1) & e^{-2\pi i2(M-1)/N} & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i2(M-1)/N} & \dots & e^{-2\pi i(N-2)(M-1)/N} & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i(N-2)(M-1)/N} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Als nächstes forme ich folgendermaßen um $2/N = 1/M$.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i1/M} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)/M} & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} \\ 1 & e^{-2\pi i2/N}(1) & e^{-2\pi i2/M} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i2/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)2/M} & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i(M-1)2/M} \\ 1 & e^{-2\pi i4/N}(1) & e^{-2\pi i3/M} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i3/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)3/M} & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i(M-1)3/M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i/M} & -e^{2\pi i/N}e^{-2\pi i/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)/M} & -e^{2\pi i/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -e^{-2\pi i(M-1)/N}(1) & e^{-2\pi i(M-1)/M} & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)(M-1)/M} & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i(M-1)(M-1)/M} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Ich ordne die Spalten mit ungerader Nummerierung an den Anfang der Matrix. Weiterhin seien definiert $a(j) = x(2j)$ und $b(j) = x(2j+1)$.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i1/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)/M} & e^{-2\pi i/N}(1) & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i/M} & \dots & e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} \\ 1 & e^{-2\pi i2/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)2/M} & e^{-2\pi i2/N}(1) & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i2/M} & \dots & e^{-2\pi i2/N}e^{-2\pi i(M-1)2/M} \\ 1 & e^{-2\pi i3/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)3/M} & e^{-2\pi i4/N}(1) & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i3/M} & \dots & e^{-2\pi i3/N}e^{-2\pi i(M-1)3/M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & e^{-2\pi i/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)/M} & -e^{-2\pi i/N}(1) & -e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i/M} & \dots & -e^{-2\pi i/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i(M-1)/M} & \dots & e^{-2\pi i(M-1)(M-1)/M} & -e^{-2\pi i(M-1)/N}(1) & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i(M-1)/M} & \dots & -e^{-2\pi i(M-1)/N}e^{-2\pi i(M-1)(M-1)/M} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(M-1) \\ b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M-1) \end{pmatrix}$$

$$W_M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i 1/M} & e^{-2\pi i 2/M} & \dots & e^{-2\pi i (M-1)/M} \\ 1 & e^{-2\pi i 2/M} & e^{-2\pi i 4/M} & \dots & e^{-2\pi i 2(M-1)/M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i (M-1)/M} & e^{-2\pi i (M-1)2/M} & \dots & e^{-2\pi i (M-1)(M-1)/M} \end{pmatrix}; \Omega_M := \begin{pmatrix} e^{-2\pi i/N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i 2/N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i 3/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-2\pi i (M-1)/N} \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \left(\begin{array}{c|c} W_M & \begin{pmatrix} e^{-2\pi i/N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i 2/N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i 3/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-2\pi i (M-1)/N} \end{pmatrix} * W_M \\ \hline W_M & \begin{pmatrix} -e^{-2\pi i/N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi i 2/N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i 3/N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{-2\pi i (M-1)/N} \end{pmatrix} * W_M \end{array}\right) * \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(M-1) \\ b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} W_M & \Omega_M * W_M \\ \hline W_M & -\Omega_M * W_M \end{array}\right) * P_M * \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_M & \Omega_M \\ I_M & -\Omega_M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} W_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_M \end{pmatrix} * P_M * \begin{pmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

Satz 5. *($m(N) = 2\ m(N/2) + (N/2)$)*
Wenn $N = 2^s$ für ein $s \in \mathbb{N}$, dann

$$m(n) = (N/2)\log_2(N).$$

L^2 Fourier Reihen / Fourier Series

Definition 10. *Es sei eine ℓ^2 Folge $x = x(n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben, dessen Fourierreihe, geschrieben $\hat{x}(\gamma)$, ist die 1 periodische Funktion gegeben durch*

$$\hat{x}(\gamma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2\pi i n\gamma}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es sich dabei um eine L^2 Fourierreihe handelt.

Satz 6. *(der Satz von Riesz-Fischer) Es sei eine ℓ^2 Folge gegeben, $c(n)_{n\in\mathbb{Z}}$, es existiert eine Lebesgue messbare Funktion $f(x)$ auf [0,1) mit der Eigenschaft, dass*

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_0^1 \left| f(\gamma) - \sum_{n=-M}^{N} c(n) e^{-2\pi i n\gamma} \right|^2 d\gamma = 0,$$

wobei das Integral das Lebesgue Integral ist. In dem Fall ist,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)|^2 < \infty.$$

Satz 7. *(Der Satz von Carleson) Es sei eine ℓ^2 Folge $c(n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben, die symmetrischen partial Summen*

$$S_N(\gamma) = \sum_{n=-N}^{N} c(n) e^{-2\pi i n\gamma}$$

konvergieren an jedem Punkt von [0,1), außer möglicherweise auf einer Menge mit Lebesgue Maß Null.

Quellen

http://www.ra.cs.uni-tuebingen.de/lehre/uebungen/ws02/ComputerVision/kapitel2.pdf
http://de.wikipedia.org/wiki/Digitales_Filter
http://www.ak.tu-berlin.de/fileadmin/a0135/Unterrichtsmaterial/Skripte/EDS_Skript.pdf
http://www.ti.informatik.uni-frankfurt.de/grimm/skript/skriptch3.html
An Introduction to Wavelet Analysis von David F. Walnut