C. Lasser, D. Sattlegger

14 juillet 2011

Aufgabe 4 (Iterative Verfahren der linearen Algebra)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax^* = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b, x^* \in \mathbb{C}^n$.

	wahr	falsch
a) Die Jacobi-Iteration zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^* = b$ benötigt in jedem Schritt eine Matrix-Vektor-Multiplikation $x \mapsto Ax$.	□	□
b) Jede symmetrische obere Hessenbergmatrix ist tridiagonal.	□	□
c) Beim GMRES-Verfahren zur Lösung von $Ax^* = b$ wird $x_k \in \mathcal{K}_k = \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}$ gesucht, sodass $\|x_k - x^*\|_2 = \min_{x\in\mathcal{K}_k} \|x - x^*\|_2$.	□	□
d) Beim CG-Verfahren wird zur Lösung von $Ax^* = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^T = A$, ein $x_k \in \mathcal{K}_k = \operatorname{span}\{b, Ab, ..., A^{k-1}b\}$ gesucht, sodass $\|x_k - x^*\|_2 = \min_{x\in\mathcal{K}_k} \|x - x^*\|_2$.	□	□
e) Im k-ten Schritt der Arnoldi-Iteration mit Startvektor b wird eine Orthonormalbasis von $\mathcal{K}_k = \operatorname{span}\{b, Ab, ..., A^{k-1}b\}$ konstruiert.	□	□
f) Das Arnoldi-Verfahren ist ein Spezialfall des Lanczos-Verfahrens für reell-symmetrische Matrizen.	□	□

Aufgabe 5 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

In dieser Aufgabe liege ein Anfangswertproblem der Form

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

mit glattem $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ vor. Die Lösung werde mit $x(t) = \Phi^{t,t_0} x_0$ bezeichnet.

	wahr	falsch
a) Jede Spalte der Matrix $W(t,s) := D_\xi \Phi^{t,s}(\xi)\big\|_{\xi=\Phi^{s,t_0}x_0}$ erfüllt die Differentialgleichung $$z' = \partial_x f(t, \Phi^{t,t_0} x_0)\, z.$$	□	□
b) Falls ein $R > 0$ existiert, sodass $\|\partial_t f(t, \Phi^{t,t_0} x_0)\| \leq R$, dann folgt für die intervallweise Konditionszahl des Anfangswertproblems $$\kappa[t_0, t] \leq \mathrm{e}^{R(t-t_0)}.$$	□	□
c) Ein Einschrittverfahren Ψ ist konsistent, falls $\left\|\Phi^{t+\tau,t}x - \Psi^{t+\tau,t}x\right\| = \mathcal{O}(\tau)$ für $\tau \to 0$.	□	□
d) Ein Einschrittverfahren Ψ hat die Konsistenzordnung p entlang der Trajektorie $x(t)$, falls $\left\|x(t) - \Psi^{t+\tau,t}x(t)\right\| = \mathcal{O}(\tau^p)$ für $\tau \to 0$.	□	□
e) Das Euler-Verfahren hat die diskrete Evolution $\Psi^{t+\tau,t}x = x + t\, f(\tau, x)$.	□	□
f) Ein s-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren benötigt mindestens $s+1$ Auswertungen der Funktion f.	□	□