C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 13. Juli 2011

Aufgabe 31 (Invarianz der kontinuierlichen und diskreten Evolution)
Es sei $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ eine lineare Differentialgleichung mit $x \in \mathbb{R}^d$ und der rechten Seite f, sowie Φ bzw. Ψ die zugehörige kontinuierliche bzw. diskrete Evolution. Dabei sei Ψ durch ein explizites Runge-Kutta-Verfahren induziert.
Weiter sei $M \in GL(d)$ eine invertierbare $d \times d$-Matrix und

$$\hat{\Phi}^{t,s}\hat{x} = M\Phi^{t,s}M^{-1}\hat{x}, \quad \hat{x} = Mx$$

die transformierte kontinuierliche Evolution.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{x}$ folgender DGL genügt:

$$\hat{x}' = \hat{f}(t,\hat{x}) := Mf(t,M^{-1}\hat{x}), \quad \hat{x}(t_0) = Mx_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass die diskrete Evolution $\hat{\Psi}$ von $\hat{x}$ folgendes erfüllt:

$$\hat{\Psi}^{t+\tau,t}\hat{x} = M\Psi^{t+\tau,t}M^{-1}\hat{x}.$$

Aufgabe 32 (Ordnung ist nicht alles)
Betrachten Sie die DGL

$$x' = |1.1 - x| + 1, \quad x(0) = 1.$$

für $0 \leq t \leq T$ mit $T = 0.1$.

(a) Bestimmen Sie eine analytische Lösung bis zum Zeitpunkt T.
Hinweis: Benutzen sie z.B. Mathematica und treffen Sie passende Fallunterscheidungen.

(b) Implemtieren sie das explizite Runge-Kutta-Verfahren für beliebiges Butcher-Tableau (b, c, A).

(c) Testen Sie nun das explizite Euler-Verfahren und die Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2 und 4 mit mehreren konstanten Schrittweiten τ.

Stellen Sie die Fehler aller Verfahren am Endzeitpunkt $T = 0.1$ in Abhängigkeit zur Schrittweite τ graphisch dar. Tragen Sie zudem den Fehler über den benötigten Aufwand in f-Auswertungen auf.

Aufgabe 33 (Periodischer Orbit und Propagationsmatrix)
Es sei f stetig differenzierbar und x die Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

mit Periode $T > 0$, d. h. es gilt $x(0) = x(T)$ und $x(0) \neq x(t)$ für $0 < t < T$. Zeigen Sie: $1 \in \sigma(W(T, 0))$.