C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 06. Juli 2011

Aufgabe 28 (Kondition eines Anfangswertproblems)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0\,.$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung analytisch und lesen Sie das Intervall, auf dem die Lösung existiert, die Evolution $\Phi^{t,t_0}(\xi)$ und die Propagationsmatrix $W(t, t_0)$ ab.

(b) Bestimmen Sie $W(t, t_0)$, indem Sie die Variationsgleichung

$$\frac{d}{dt}W(t,t_0) = \partial_x f(t, \Phi^{t,t_0}(x_0))W(t,t_0)\,, \quad W(t_0,t_0) = 1$$

analytisch lösen.

(c) Bestimmen Sie $\kappa_0(t)$ und $\kappa[0, 1-\epsilon]$ ($\epsilon > 0$) für den Fall $x_0 = 1$.

Aufgabe 29 (Euler-Verfahren)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = x^{\frac{1}{2}}, \quad x(0) = x_0.$$

(a) Sei zunächst $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für $t \in [0, \infty)$ mehr als zwei nichtnegative Lösungen existieren und geben Sie solche Lösungen explizit an.

(b) Sei nun $x_0 = \epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass dieses Anfangwertproblem auf $t \in [0, \infty)$ eindeutig lösbar ist.

(c) Sei wieder $x_0 = 0$. Diskretisieren Sie das Anfangswertproblem mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren:

explizit:	$x_{n+1} = x_n + \tau\sqrt{x_n}$	$n \geq 0$
implizit:	$x_{n+1} = x_n + \tau\sqrt{x_{n+1}}$	$n \geq 0$

und vergleichen Sie die erhaltenen numerischen Resultate mit der analytischen Lösung (benutzen Sie beim impliziten Euler-Verfahren stets die größere der beiden Lösungen für x_{n+1}). Zeigen Sie für das implizite Euler-Verfahren: $x_n \geq x(n\tau)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, jedes $\tau > 0$ und eine nicht-triviale analytische Lösung x des Anfangswertproblems.

Aufgabe 30 (Katz und Maus)
Eine Katze jagt in der (x, y)-Ebene eine Maus und läuft dabei stets mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit $v_K = 2$ direkt auf die Maus zu. Die Maus ihrerseits möchte auf direktem Wege mit Geschwindigkeitsbetrag $v_M = 1$ in ihr Loch im Punkt $(0, 1)$ fliehen. Die Maus befinde sich zur Zeit $t = 0$ am Punkt $(0, 0)$ und die Katze am Punkt $(1, 0)$.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichungen auf, welche die Bahn der Katze bzw. die Bahn der Maus beschreiben.

(b) Berechnen Sie in Matlab mit Hilfe der Funktion *ode*45, wann und wo sich die Katze bis auf 10^{-5} der Maus genähert hat.
Hinweis: $ode45(@rechte\_Seite,\ [0,1],\ [1;0],\ odeset('Events', @event))$ mit geeigneten Funktionen *rechte_Seite* und *event* (siehe auch *help ode*45).