C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov
29. Juni 2011

Aufgabe 25 (Invarianz der Arnoldi-Iteration)
Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{C}^m$ so dass der Krylovraum $\mathcal{K}_n(A, b)$ noch vollen Rang besitzt. Weiter seien im n-ten Schritt der Arnoldi-Iteration $\{\theta_i\}$ die Ritzwerte und $Q_n y_i$ die Ritzvektoren, wobei y_i die zugehörigen Eigenvektoren von H_n sind.
Zeigen Sie folgende Invarianzeigenschaft der Arnoldi-Iteration:

(a) Die Ritzwerte von $\tilde{A} = A + \sigma I$ für $\sigma \in \mathbb{C}$ mit Startvektor $\tilde{b} = b$ sind $\{\theta_i + \sigma\}$.

(b) Die Ritzwerte von $\tilde{A} = \sigma A$ für $\sigma \in \mathbb{C}$ mit Startvektor $\tilde{b} = b$ sind $\{\sigma\theta_i\}$.

(c) Die Ritzwerte von $\tilde{A} = UAU^*$ und mit Startvektor $\tilde{b} = Ub$ für unitäres U sind $\{\theta_i\}$.

Sind die Ritzvektoren in den drei Fällen auch invariant?

Aufgabe 26 (Abbruch der Arnoldi-Iteration)
Für ein Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ breche die Arnoldi-Iteration zum Startvektor $b \in \mathbb{C}^m$ nach n Schritten mit $h_{n+1,n} = 0$ ab. Mit $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n(A, b)$ bezeichen wir die zugehörigen Krylovräume. Zeigen Sie:

(a) Wie hängen $AQ_n = Q_{n+1}\tilde{H}_n$ und $AQ_n = Q_n H_n$ zusammen?

(b) Der Krylovraum $\mathcal{K}_n$ ist ein invarianter Unterraum bzgl. A, also $A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$.

(c) $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_{n+2} = \cdots$

(d) $\sigma(H_n) \subseteq \sigma(A)$.

(e) Ist A invertierbar, so liegt die Lösung x von $Ax = b$ in $\mathcal{K}_n$.

Aufgabe 27 (Numerisches Beispiel für Lanczos)
Betrachten Sie die 203×203-Matrix

$$A = \operatorname{diag}(0,\ 0.01,\ \ldots,\ 1.99,\ 2,\ 2.5,\ 3).$$

Implementieren Sie die Lanczos-Iteration in Matlab mit einem zufälligen (normierte) Startvektor q_1. Erstellen Sie eine Grafik, in der Sie das Lanczospolyom im 9-ten Schritt im Intervall $[-0.5, 3.5]$ einzeichnen und tragen Sie auch die zugehörigen Ritzwerte ein. Geben Sie weiter die Ritzwerte nach 20 Schritten aus.
Tipp: Gucken Sie sich die Befehle poly, polyval, und axis in Matlab einmal an.