C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 22. Juni 2011

Aufgabe 22 (CG-Koeffizienten)
Zeigen Sie für die in der Vorlesung eingeführten Größen

$$\alpha_{k+1} = \frac{\langle r_k, p_{k+1}\rangle}{\langle p_{k+1}, p_{k+1}\rangle_A} \quad \text{und} \quad \beta_{k+1} = -\frac{\langle r_k, r_{k-1}\rangle_A}{\langle p_k, r_{k-1}\rangle_A}$$

folgende Identitäten:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\|r_k\|_2^2}{\|p_{k+1}\|_A^2} \quad \text{und} \quad \beta_{k+1} = \frac{\|r_k\|_2^2}{\|r_{k-1}\|_2^2}$$

Hinweis für die zweite Identität: Leiten Sie zunächst $\|r_k\|_2^2 = -\alpha_k \langle r_k, p_k\rangle_A$ her und benutzen Sie die in der Vorlesung bewiesene Identität $\langle p_k, r_{k-1}\rangle_A = \frac{\|r_{k-1}\|_2^2}{\alpha_k}$.

Aufgabe 23 (CG-Residuen)
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spd mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Definieren Sie sinnvoll $A^{\frac{1}{2}}$ (es soll $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$ gelten).

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|Ax\|_2 = \|A^{\frac{1}{2}}x\|_A \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda_n}\,\|x\|_A \leq \|Ax\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}\,\|x\|_A \;\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(c) Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Iterierten des CG-Verfahrens. Zeigen Sie für ein beliebiges Polynom p mit $deg(p) \leq k$, $p(0) = 1$:

$$\frac{\|b - Ax_k\|_2}{\|b - Ax_0\|_2} \leq \sqrt{\kappa_2(A)} \max_{z\in\sigma(A)} |p(z)|.$$

Aufgabe 24 (CG vs G)
Wir wollen das Energiefunktional $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ minimieren. Dazu verwenden wir das CG-Verfahren und vergleichen es mit dem einfachen Gradientenverfahren, welches wie folgt funktioniert:
Mit einem Startvektor y_0 beginnend iteriert man $y_{k+1} = y_k + \gamma_k r_k$, wobei $\gamma_k = \frac{\|r_k\|^2}{\|r_k\|_A^2}$ und $r_k = -\nabla\varphi(y_k)$, d.h. "man geht in jedem Iterationsschritt optimal weit in Richtung des steilsten Abstiegs".

Implementieren Sie beide Verfahren für das obige Problem und erstellen Sie eine grafische Darstellung Ihrer Ergebnisse. Zu plotten sind die Höhenlinien von φ auf $[0,2] \times [0,2]$ und die Pfade $(x_0, x_1, \dots)$ von CG und $(y_0, y_1, \dots)$ von G, wobei $x_0 = y_0 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ (maximale Iterationszahl = 20).