C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 15. Juni 2011

Aufgabe 19 (Spektralradius)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|A^k\|_2}{\rho(A)^k} = const.$$

(b) Es sei $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\rho(A)^k \leq \|A^k\|.$$

(c) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon > 0$. Konstruieren Sie eine submultiplikative Norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ so dass $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Aufgabe 20 (M-Matrizen)

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt M-Matrix, wenn die Elemente abseits der Diagonale nichtpositiv sind und die Inverse A^{-1} nur nichtnegative Einträge hat, d.h.

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leq 0, \qquad \text{für } i \neq j, \\ A^{-1} &\geq 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder M-Matrix A eine Diagonalmatrix D gibt, so dass $D^{-1}AD$ strikt diagonal dominant ist. Konstruieren Sie hierfür zuerst einen Vektor x mit $x \geq 0$ und $Ax > 0$.

(b) Zeigen Sie nun folgende Aussage:
Es sei A eine M-Matrix mit Matrixsplitting $A = M - N$ mit $\operatorname{diag}(N) = 0$ und $|A| = |M| + |N|$. Dann ist M invertierbar und es gilt $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Aufgabe 21 (Relaxierte Iteratioinsverfahren)

Zu jedem Iterationsverfahren $x_{k+1} = Mx_k + c$ kann man relaxierte Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = \omega(Mx_k + c) + (1-\omega)x_k = M_\omega x_k + \omega c$$

mit $M_\omega = \omega M + (1-\omega)I$ betrachten.

(a) Unter welchen Bedingungen an A und ω konvergiert die relaxierte Richardson-Iteration?

(b) Implementieren Sie die relaxierte Richardson-Iteration und testen Sie die Konvergenz des Verfahrens mit der Matrix A, die Sie über den Befehl `G = numgrid('S',5);A = full(delsq(G));` erhalten, und mit der rechten Seite $b = \mathbb{1}$ und dem Startvektor $x_0 = 0$. Erstellen Sie eine Grafik die die Abhängigkeit von $\omega \in [0, 0.4]$ zu der Anzahl der Iterationsschritte zeigt.

(c) Implementieren Sie nun die relaxierte Jacobi- sowie die relaxierte Gauß-Seidel-Iteration. Benützen Sie die Matrix A mit `G = numgrid('L',9);A = full(delsq(G));` und der rechten Seite $b = \mathbb{1}$ sowie $x_0 = 0$. Erstellen Sie eine Grafik, die die Abhängigkeit von $\omega \in [0, 2]$ zu der Anzahl der Iterationsschritte zeigt.