C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 8. Juni 2011

Aufgabe 16 (Spezielle Quadraturformel)

Zur Approximation des Integrals $I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx$ wird die Quadraturformel

$$Q(f) := a_0 f(0) + a_1 f'(0) + \lambda_0 f(x_0)$$

betrachtet.
Bestimmen Sie die Parameter a_0, a_1, λ_0 und x_0 so, dass Polynome möglichst hohen Grades n von Q exakt integriert werden. Beweisen Sie, dass der Grad $n+1$ nicht erreicht werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie Polynome p mit $p(0) = p(x_0) = 0$.

Aufgabe 17 (Adaptive Quadratur mit Trapezregel)

Sei $f \in C^2[a,b]$. Leiten Sie für eine adaptive Trapezregel, die über den Intervallmittelpunkt verfeinert, eine a-posteriori Fehlerabschätzung her.
Welche zusätzliche Eigenschaft von f benötigen Sie?

Aufgabe 18 (Monte-Carlo-Quadratur)

(a) Sei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel.
Schreiben Sie ein Programm $kugel(n, N)$, welches für vorgegebene $n, N \in \mathbb{N}$ folgendes ausführt:

(i) Mit Hilfe der $rand$-Funktion von Matlab werden mehrmals ($M = 20$ unabhängige Läufe) N “zufällig” gleichverteilte Punkte des Würfels

$$W_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$$

erzeugt.

(ii) Der Anteil a derjenigen Punkte, die in B_n liegen, wird bestimmt (für jeden Lauf einzeln), $v = 2^n a$ wird berechnet.

(iii) Ausgegeben werden v, gemittelt über die 20 Läufe, und ein Schätzer für die zugehörige Standardabweichung.

(b) Setzen Sie die Ausgabe v Ihres Programms mit dem Volumen $Vol(B_n)$ in Beziehung, indem Sie über Monte-Carlo-Quadratur argumentieren.

(c) Schreiben Sie ein weiteres Programm, welches für festes n den Fehler $|Vol(B_n) - v|$ und die (geschätzte) Standardabweichung von v über N plottet (doppeltlogarithmisch), wobei $N = 2^k$, $k = 0, \ldots, 20$. Testen Sie Ihr Programm für $n = 2,\ 4,\ 10$ und lesen Sie jeweils die Konvergenzrate ab.

Die Formel für das Volumen der Einheitskugel lautet: $Vol(B_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ (die Γ-Funktion ist definiert durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$).