C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 01. Juni 2011

Aufgabe 13 (Christoffel-Darboux-Formel)
Aus der Dreitermrekursion

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})p_n(x) - \beta_{n+1}p_{n-1}(x)$$

kann man die Dreitermrekursion für die normierten Polynome $p_n^*(x)$ herleiten und erhält

$$p_{n+1}^*(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n}(x - \alpha_{n+1})p_n^*(x) - \frac{k_{n+1}}{k_{n-1}}\beta_{n+1}p_{n-1}^*(x)$$

wobei k_n der führende Koeffizient von p_n^* ist.

(a) Zeigen Sie

$$\beta_{n+1} = \frac{k_{n-1}^2}{k_n^2}.$$

(b) Zeigen Sie die Christoffel-Darboux-Formel zuerst für $x \neq y$

$$\sum_{j=0}^{n} p_j^*(x)p_j^*(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}^*(x)p_n^*(y) - p_n^*(x)p_{n+1}^*(y)}{x - y}.$$

(c) Zeigen Sie nun die Christoffel-Darboux-Formel für den Fall $x = y$

$$\sum_{j=0}^{n} p_j^*(x)^2 = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left({p_{n+1}^*}'(x)p_n^*(x) - {p_n^*}'(x)p_{n+1}^*(x) \right).$$

Aufgabe 14 (Gauß-Legendre vs. Clenshaw-Curtis)
Implementieren Sie die Quadratur nach Gauß-Legendre und die nach Clenshaw-Curtis. Testen Sie beide Verfahren indem Sie die Konvergenz für der Integrale $\int_{-1}^{1} f_i(x)\,dx$ mit den Funktionen $f_1 = x^{20}$, $f_2 = e^{-x^2}$, $f_3 = (1 + 16x^2)^{-1}$ und $f_4 = |x|^3$ untersuchen.
Ist die Gauß-Legendre "doppelt" so gut wie Clenshaw-Curtis? Können Sie das Verhalten erklären?

Aufgabe 15 (Spezielle Quadraturformel)
Für $h > 0$ soll das spezielle Integral

$$I(f) := \int_{-h}^{h} x^2 \sqrt{|x|} f(x)\,dx \qquad \text{durch} \qquad \tilde{I}(f) := \alpha_1 f(-h) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(h)$$

approximiert werden.

(a) Bestimmen Sie die α_i so, dass $I(p) = \tilde{I}(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}_2$.

(b) Bis zu welchem Polynomgrad ist die Quadraturformel $\tilde{I}$ exakt?

(c) Leiten Sie eine Fehlerabschätzung der Form

$$|I(f) - \tilde{I}(f)| \leq ch^q \|f^{(p)}\|_\infty$$

her. Bestimmen Sie p, q und c.
Hinweis: Benützen Sie das Hermite-Interpolationspolynom mit den Stützstellen $-h, 0, 0, h$.