C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 25. Mai 2011

Auf diesem Übungsblatt ist $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Aufgabe 10 (Mittelpunktsregel)

Für $f \in C^2[a,b]$ betrachten wir die Mittelpunktsregel $Q(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

(a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsregel lineare Funktionen exakt integriert.

(b) Schätzen Sie den Integrationsfehler $|I(f) - Q(f)|$ durch $\|f''\|_\infty$ ab.
Hinweis: Taylorapproximation.

(c) Formulieren Sie eine zusammengesetzte Mittelpunktsregel für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[a,b]$ und schätzen Sie den Integrationsfehler ab.

(d) Implementieren Sie in Matlab die zusammengesetzte Mittelpunktsregel und integrieren Sie damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & \text{wenn } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^2}{2\pi - 2} - (x-2), & \text{wenn } 2 < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Welche Konvergenzordnung des Integrationsfehlers beobachten Sie?

Bemerkung:

(i) Die Fourier-Koeffizienten von f fallen kubisch ab.

(ii) In einer doppeltlogarithmischen Darstellung sieht man die Konvergenzordnung am besten.

Aufgabe 11 (Konvergenz von Quadraturformeln)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir Quadraturformeln $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n w_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ auf dem Intervall $[a,b]$, wobei Q_n Polynome vom Grad $\leq n$ exakt integriert und $w_j^{(n)} > 0 \ \forall j = 0, \dots, n$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass für den Vektor der Gewichte gilt: $\|w^{(n)}\|_1 = (b-a)$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes:

$$Q_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(f) \quad \text{für } f \in C[a,b] \ .$$

Aufgabe 12 (Newton-Cotes)

Die Newton-Cotes Quadraturformel auf $[0,1]$ mit den $n+1$ äquidistanten Stützstellen $x_j = j/n$, $j = 0, \dots, n$ ist so konstruiert, dass Polynome mit Grad $\leq n$ exakt integriert werden. Sei nun *n gerade.*

(a) Zeigen Sie, dass $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$ folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\omega_{n+1}(1-x) = -\omega_{n+1}(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

(b) Zeigen Sie, dass (für gerades n) auch Polynome mit Grad $\leq n+1$ exakt integriert werden.
Hinweis: Sei p_n das Interpolationspolynom für $f \in C^{n+1}[0,1]$ an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$, so existiert für jedes $x \in [0,1]$ ein $\xi \in [0,1]$, für das gilt:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x).$$