C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 18. Mai 2011

Aufgabe 7 (QR-Algorithmus und Tridiagonalmatrizen)
Es sei $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine hermitsche Tridiagonalmatrix. H heißt *reduziert*, falls es ein $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ gibt mit $h_{(i+1),i} = 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist H reduziert, dann zerfällt das Eigenwertproblem in Eigenwertprobleme niedrigerer Dimension.

(b) Ist H nicht reduziert, dann sind alle Eigenwerte geometrisch einfach.

(c) Ist H nicht reduziert und λ ein Eigenwert von H, dann gilt für $\tilde{H} = RQ + \lambda I$

$$\tilde{H}(m,:) = (0,\ldots,0,\lambda),$$

wobei Q und R aus der QR-Zerlegung $H - \lambda I = QR$ stammen.

(d) Gilt (c) auch für allgemeine Matrizen mit Eigenwert λ? (Beweis oder Gegenbeispiel!).

Aufgabe 8 (QR-Algorithmus und Matrixpotenzen)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, und die Matrizen $A_k,\ Q_k,\ R_k$ seinen durch den QR-Algorithmus ohne Shift erzeugt, d.h. $A_0 = A$ und

$$\begin{aligned} A_k &= Q_k R_k, \\ A_{k+1} &= R_k Q_k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$A^k = Q_0 \cdots Q_{k-1} R_{k-1} \cdots R_0.$$

Aufgabe 9 (Shiftstrategien für QR-Algorithmus)

(a) Implementieren Sie den QR-Algorithmus mit Rayleigh-Quotienten-Shift in Matlab. Arbeiten Sie mit der vollen Matrix und nicht mit der zugehörigen Hessenberg-Form.

(b) Testen Sie ihre Implementierung mit den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit dem `eig`-Befehl von Matlab. Sie sollten feststellen, dass die Eigenwerte von A_1 sehr gut approximiert werden, aber die von A_2 nicht. Warum konvergiert der Algorithmus für A_2 nicht?

(c) Implementieren Sie nun anstatt des Rayleigh-Quotienten-Shifts den sog. Wilkison-Shift und testen Sie ihren Algorithmus wieder mit den Matrizen A_1 und A_2.

Der Wilkinson-Shift funktioniert wie folgt. Man extrahiert aus der Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ den rechten unteren 2×2 Block $B = A(m-1:m; m-1:m)$. Von B berechnet man die Eigenwerte μ_1 und μ_2. Dann wählt man als Shift denjenigen Eigenwert, der näher an $A(m,m)$ liegt. Falls beide EW gleich weit entfernt sind, so wählt man zufällig einen der beiden.