C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov 11. Mai 2011

Aufgabe 4 (Vektoriteration)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, indem Sie die Vektoriteration und die inverse Vektoriteration (einmal für $\mu = 0$ und einmal für $\mu = 2$) implementieren (z.B. mit Startvektor e_1). Wählen Sie sinnvolle Abbruchkriterien für Ihre Iterationen (mit Begründung!).

Aufgabe 5 (Rayleigh-Quotient)

Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\langle .,. \rangle$ bezeichne das euklidische Skalarprodukt und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie die folgenden beiden Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten $\rho(u) = \langle u, Au\rangle / \|u\|^2$:

(a) Für alle $\mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|(A-\mu)u\|^2 \geq \|Au\|^2 - \|\rho(u)u\|^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\mu = \rho(u)$ (minimale Residuums-Eigenschaft).

(b) $\langle u, (A-\rho(u))u\rangle = 0$.

Aufgabe 6 (Rayleigh-Quotienten-Iteration)

Die Notation sei wie in Aufgabe 5 und $(\rho_k, u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rayleigh-Quotienten-Iteration erzeugt ($\rho_k = \rho(u_k)$) .

(a) Bestimmen Sie $(\rho_k, u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für den Startvektor $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.
Folgern Sie, dass die Folge $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch konstant sein kann, wenn ρ_0 kein Eigenwert von A ist und überprüfen Sie Ihre Resultate mit Matlab.

(b) Sei $r_k := (A-\rho_k)u_k$ das Residuum im k-ten Schritt der Rayleigh-Quotienten-Iteration. Zeigen Sie, dass für hermitesche Matrizen A die Folge $(\|r_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Sie können die Ergebnisse aus Aufgabe 2 verwenden und die Tatsache, dass $\|y\| = |\langle x, y\rangle|$ ist, falls x und y parallel sind und x normiert ist.