C. Lasser, T. Satzger, I. Klebanov

04. Mai 2011

Aufgabe 1 (Matrixpotenzen)

Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit dominatem Eigenwert $|\lambda_1|$, d.h. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

(a) Zeigen Sie, dass $\|A^k\|_2 = |\lambda_1|^k$ gilt, falls die Matrix A

   (i) diagonal

   (ii) normal

   ist.

(b) Zeigen Sie, dass für diagonalisierbare Matrizen A

$$\|A^k\|_2 \simeq \gamma \, |\lambda_1|^k$$

mit einer Konstanten γ gilt. Können Sie γ näher bestimmen?
Tipp: Skalieren Sie das Problem so, dass $\lambda_1 = 1$ gilt.

Aufgabe 2 (Vorsicht bei Asymptotiken)

(a) Es sei

$$H = 0.33 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} H^k = 0$. Erstellen Sie mit Matlab eine Grafik für das (1,2)-Element von H^k für $1 \leq k \leq 1000$.

(b) Es sei

$$A = 0.99 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Erstellen Sie mit Matlab eine Grafik für das (1,2)-Element von A^k für $1 \leq k \leq 1000$.

Sie können auch z.B. Matlab oder Mathematica benutzen, um Eigenwerte und -vektoren zu berechnen.

Aufgabe 3 (Normale Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ eine normale Matrix. Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $A - \lambda I$ normal.

(b) $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(A^*)$ und $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^*)$.

(c) Ist A Dreiecksmatrix, dann ist A diagonal.

Gilt die Umkehrung von (b), d. h. folgt für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(A^*)$ und $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^*)$, dass A bereits normal ist? *(Beweis oder Gegenbeispiel erforderlich.)*