....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Obige Angaben sind richtig:

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

MODULPRÜFUNG MODUL MA 2302
Numerik

29. Juli 2011, 10:00 - 11:30 Uhr

Prüfer: Prof. Dr. C. Lasser

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die Berarbeitungszeit beträgt 90 min.
- Als Hilfsmittel ist nur ein DIN-A4 Blatt sowie Schreibzeug erlaubt.
- Die Klausur besteht aus insgesamt 8 Seiten mit 6 Aufgaben.
- Es wird Aufgabe 1 bewertet, sowie vier der fünf restlichen Aufgaben.
- Kreuzen Sie in untenstehender Tabelle an, welche der Aufgaben 2 bis 6 bewertet werden sollen. Falls Sie alle Aufgaben ankreuzen, so werden die Aufgaben 2 bis 5 bewertet.

Aufgabe 2	
Aufgabe 3	
Aufgabe 4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	

Aufgabe 1 (Kurz und bündig) **8 Punkte**

Beantworten Sie folgende Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort.

(a) Ist die inverse Iteration mit einem Shift μ, der nahe am Spektrum von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ liegt, ein instabiles Verfahren zur Eigenwertberechung?

Nein. Zwar ist der Schritt $(A-\mu)v_k = u_{k-1}$ schlecht konditioniert, aber der entstehende Fehler wird bei der Normalisierung geschluckt.

(b) Ist die Clenshaw-Curtis-Quadratur mit $n+1$ Stützstellen exakt für alle Polynome vom Grad kleiner gleich $n+1$?

Nein. Clenshaw-Curtis-Quadratur ist nur exakt für Polynome von Grad kleiner gleich n; Gauß-Legendre ist exakt für Polynome von Grad kleiner gleich $2n+1$.

(c) Minimiert der k-te Schritt des CG-Verfahrens das Energiefunktional über $\mathcal{K}_k(A, r_0) + x_0$?

Ja, das ist gerade die Konstruktion des CG-Verfahrens.

(d) Ist das durch $b = (0,1)^T$, $c = (0, \frac{1}{2})^T$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ definierte Verfahren von Runge gegen Autonomisierung invariant?

Ja, es ist $c_1 = 0 = a_{11} + a_{12}$ und $c_2 = 1/2 = a_{21} + a_{22}$, und das Verfahren ist auch konsistent wegen $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$.

Aufgabe 2 (QR-Algorithmus) **6 Punkte**

Gegeben ist für eine hermitesche Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ der folgende Baustein einer QR-Iteration:

$$\begin{aligned} \kappa &= a_{nn} \\ A - \kappa &= QR \\ B &= RQ + \kappa \end{aligned}$$

(a) $(A-\kappa)$ sei invertierbar. Zeigen Sie:

$$Q(:,n) = \bar{r}_{nn}(A-\kappa)^{-1}e_n,$$

wobei $Q(:,n)$ die letzte Spalte von Q, r_{nn} den Eintrag unten rechts in R und e_n den n-ten Einheitsvektor bezeichnen.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \sigma(B)$ gilt.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(:,n)^* = (Qe_n)^* = e_n^* Q^{-1} = e_n^* R(A-\kappa)^{-1} = R(n,:)(A-\kappa)^{-1} \\ = r_{nn} e_n^* (A-\kappa)^{-1} \end{aligned}$$

Da A hermitesch ist, folgt durch Konjugation auf beiden Seiten die Behauptung.

(b) In einem Schritt der QR-Iteration wird lediglich eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt, denn:

$$Q^*AQ = Q^*(A-\kappa)Q + \kappa = Q^*QRQ + \kappa = B.$$

Somit bleiben die Eigenwerte unverändert.

Aufgabe 3 (Quadratur – Stützstellen und Gewichte) **6 Punkte**

Seien $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden, $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ und $Q(f) = \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$ die zugehörige Quadraturformel für die Berechnung von $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

(a) Zeigen Sie, dass Q genau dann alle Polynome vom Grad kleiner gleich n exakt integriert, wenn $w_j = \int_a^b \ell_j(x)dx$ für alle $j = 0, \dots, n$ gilt, wobei ℓ_j das zu den Stützstellen gehörige j-te Lagrange-Polynom ist.

(b) Zeigen Sie, dass $w_j > 0$ für alle $j = 0, \dots, n$ gilt, falls Q Polynome vom Grad kleiner gleich $2n$ exakt integriert.

(a) Sei $w_j = \int_a^b \ell_j(x)dx\ \forall j$ und p ein Polynom von Grad $\leq n$. Dann ist die Interpolante von p an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ gerade p selbst, daher $p = \sum_{j=0}^n p(x_j)\ell_j$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
I(p) &= \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^n p(x_j)\ell_j(x)dx = \sum_{j=0}^n p(x_j) \int_a^b \ell_j(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^n w_j p(x_j) = Q(p).
\end{aligned}
$$

Ist $w_j \neq \int_a^b \ell_j(x)dx$ für ein $j \in \{0, \dots, n\}$, so folgt für $p = \ell_j \in \mathbb{P}_n$:

$$
Q(p) = \sum_{i=0}^n w_i \ell_j(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i \delta_{ij} = w_j \neq \int_a^b \ell_j(x)dx = I(p)\,,
$$

also werden nicht alle Polynome von Grad $\leq n$ exakt integriert.

(b) Sei $j \in \{0, \dots, n\}$. Dann ist ℓ_j^2 Polynom von Grad $2n$ und wird daher exakt integriert. Somit gilt:

$$
0 < I(\ell_j^2) = Q(\ell_j^2) = \sum_{i=0}^n w_i \ell_j^2(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i \delta_{ij} = w_j.
$$

Aufgabe 4 (Quadratur – Gauß-Legendre) **6 Punkte**

Erklären Sie mit jeweils einem kurzen Satz die einzelnen Zeilen des folgenden Matlab-Codes zur Gauß-Legendre-Quadratur.

```
beta = 1./(4-[1:n].^(-2));
T = diag(sqrt(beta),1) + diag(sqrt(beta),-1);
[V,D] = eig(T);
x = diag(D);
w = 2*V(1,:).^2;
I = w*feval(f,x);
```

```
% Koeffizienten der Drei-Term-Rekursion für Gauß-Legendre. alpha_i=0 wird
% implizit genuzt.
beta = 1./(4-[1:n].^(-2));
% zugehörige Tridiagonalmatrix aufstellen. alpha_i=0 implizit genutzt.
T = diag(sqrt(beta),1) + diag(sqrt(beta),-1);
% Eigenwerte und Vektoren ausrechnen
[V,D] = eig(T);
% Stützstellen sind gerade die Eigenwerte von T.
x = diag(D);
% Die Gewichte erhält man durch punktweises quadrieren der
% ersten Komponenten der zugehörigen Eigenvektoren
w = 2*V(1,:).^2;
% Auswertung der Quadraturformel als Skalarprodukt von
% Gewicht und Funktionswerten.
I = w*feval(f,x);
```

Aufgabe 5 (Arnoldi-Iteration) **6 Punkte**

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ breche die Arnoldi-Iteration zum Startvektor $b \in \mathbb{C}^m$ nach n Schritten mit $h_{n+1,n} = 0$ ab. Wie sie aus der Vorlesung wissen, gilt dann

$$AQ_n = Q_n H_n.$$

Weiter bezeichne $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_k(A, b)$ den k-ten Krylovraum.
Zeigen Sie:

(a) Der Krylovraum $\mathcal{K}_n$ ist ein invarianter Unterraum bzgl. A, also $A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$.

(b) $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_{n+2} = \cdots$

(c) Ist A invertierbar und $y \in \mathcal{K}_n$, so liegt die Lösung x von $Ax = y$ in $\mathcal{K}_n$.

(a) Die Spaltenvektoren $q_1, \ldots, q_n$ bilden eine Basis des $\mathcal{K}_n$. Da nach Angabe $AQ_n = Q_n H_n$ gilt, ist insbesondere $Aq_j \in \mathcal{K}_n$ für $j = 1, \ldots, n$. Folglich ist $A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$.

(b) Es ist $\mathcal{K}_{n+1} = b \oplus A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$ wegen Teilaufgabe (a). Nach Definition ist $\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n+1}$. Folglich ist $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$. Induktiv folgt $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_{n+2} = \cdots$.

(c) Wegen Teilaufgabe (a) ist $A\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$. Ist A invertierbar, so muss aus Dimensionsgründen sogar $A\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n$ sein, also ist A ein Automorphismus auf $\mathcal{K}_n$. Daher gibt es ein $x \in \mathcal{K}_n$ mit $Ax = y \in \mathcal{K}_n$.

Aufgabe 6 (Runge-Kutta-Verfahren) **6 Punkte**

Sei Ψ^τ die diskrete Evolution eines s-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens (b, A) für das Anfangswertproblem $x' = x$, $x(0) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Psi^\tau 1$ bezüglich τ ein Polynom vom Grad kleiner gleich s ist.

(b) Zeigen Sie, dass $s \geq p$ gilt, falls das Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p hat.

(a) Für die k_i ergibt sich:

$$k_1 = f(1) = 1,\ k_2 = f(1 + \tau a_{21} k_1) = 1 + \tau a_{21}$$

und rekursiv erhält man: $k_i = f(1 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) = 1 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$ ist Polynom in τ von Grad $\leq i - 1$.
Daher ist $\Psi^\tau 1 = 1 + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$ Polynom in τ von Grad $\leq s$.

(b) Das Anfangswertproblem wird gelöst von $x(t) = e^t$, d.h.

$$\Phi^\tau 1 = \sum_{k=0}^{p} \frac{\tau^k}{k!} + \mathcal{O}\left(\tau^{p+1}\right).$$

Da nach (a) $\Psi^\tau 1$ Polynom in τ von Grad $\leq s$ ist, kann $\Phi^\tau 1 - \Psi^\tau 1 = \mathcal{O}\left(\tau^{p+1}\right)$ nur dann gelten, wenn $s \geq p$ ist.