I. Householder Reflexionen

⇝ Alston Householder 1958

1. Ziel: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Zerlegung in (1) $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ unitär und (2) $R \in Gl(n;\mathbb{R})$ so, dass $A = Q\cdot R$

2. Idee:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_1\cdot} \underset{Q_1\cdot A}{\begin{bmatrix} * & \\ 0 & \\ 0 & * \\ 0 & \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_2\cdot} \underset{Q_2\cdot Q_1\cdot A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & 0 & * \\ & 0 & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_3\cdot} \underset{Q_3\cdot Q_2\cdot Q_1\cdot A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \\ & & \end{bmatrix}}$$

3. Verfahren: Schritt k mit $k \in \{1,\dots,n\}$

Wähle

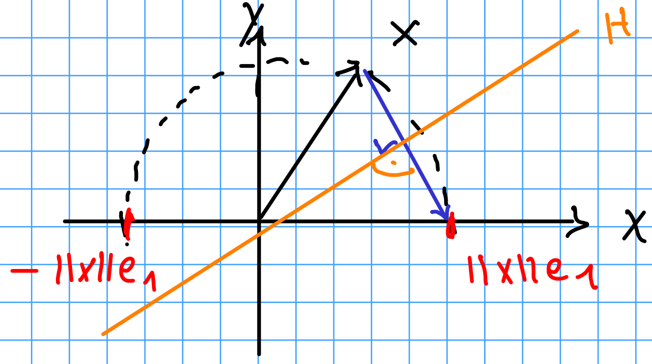
$$Q_k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \in O(m;\mathbb{R})$$

mit $I \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ und $F \in \mathbb{R}^{(m-k+1)\times(m-k+1)}$ orthonormal.

Sei $x \in \mathbb{R}^{m-k+1}$ so dass x die Einträge k bis m der Spalte k beinhaltet.

$$x = \begin{bmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \xrightarrow{F\cdot x} \|x\|\, e_1 \qquad e_1 \in \mathbb{R}^{m-k+1}$$

4. Veranschaulichung:



$v = \|x\| e_1 - x$

$$F = \left(I - 2\frac{v \cdot v'}{v' \cdot v}\right)$$

5. Verbesserung:

$v = -\operatorname{sign}(x_1)\|x\|e_1 - x$ falls $x_1 = 0$, so sei $\operatorname{sign}(x_1) = 1$

\# flop: $4mn^2 - \frac{4}{3}n^3$ flops

II. SVD-Algorithmen

<u>Wdh.:</u> Satz 3.5 Die Singulärwerte σ_i von A sind die jeweiligen pos. Quadratwurzeln der Eigenwerte λ_i von $A' \cdot A$.

<u>Algorithmus 1:</u>

wenn $(A = U \Sigma V')$

1. Berechne $H = A' \cdot A$
2. Löse das EWP $H = V \,\Lambda\, V'$
3. Berechne $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \\ & & \\ \end{pmatrix}$
4. Löse $U \cdot \Sigma = A \cdot V$ für U.

$A = U \Sigma V'$

$(\Longrightarrow)$ instabil

<u>Algorithmus 2:</u> Sei A nun quadratisch

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A' \\ A & 0 \end{bmatrix} \text{ hermitesch.}$$

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V' \iff A V = U \Sigma \qquad A' U = V \Sigma' = V \cdot \Sigma$$

Daher:

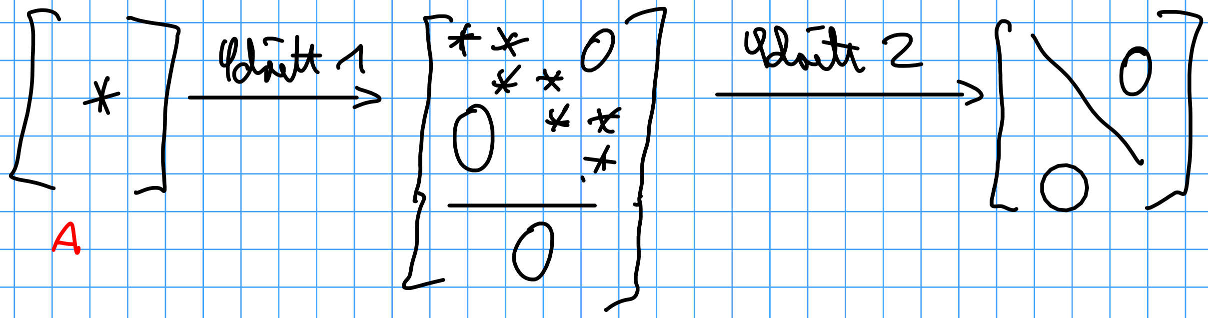
$$\begin{bmatrix} 0 & A' \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix}$$

Eigenschaften: - Σ diagonal mit den Singulärwerten

2) U und V erfüllen: $A = U \Sigma V'$

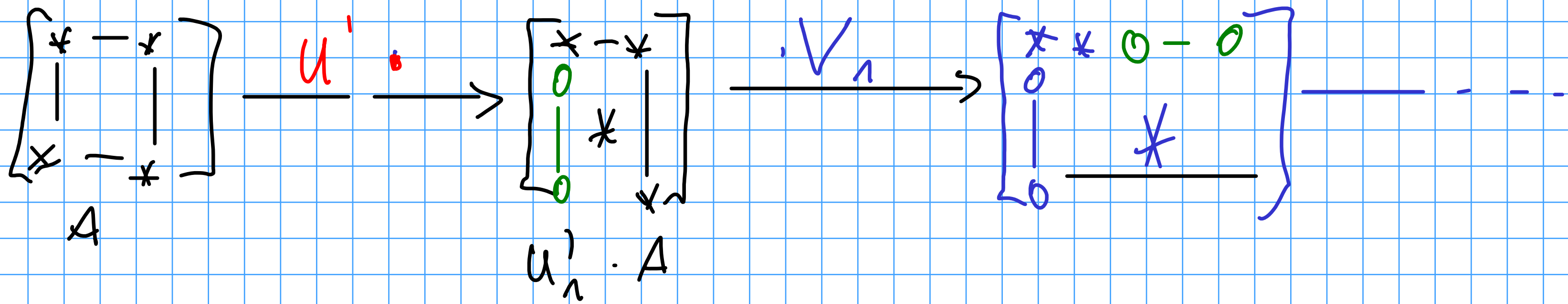
Standard-Algorithmus:

Idee:



Golub-Kahan-Bidiagonalisierung:

Idee:



Es werden gebraucht:
* n Reflexionen von links
* $n-2$ Reflexionen von rechts

Flops: $\approx 4mn^2 - \frac{4}{3}n^3$ Flops

Schritt 2 mit „chasing"

Idee:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & 0 \\ & * & * & \\ & & * & * \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\,\Omega_1'} \begin{bmatrix} * & 0 & & 0 \\ * & * & * & \\ & & * & * \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\Omega_2\,\cdot} \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & \\ & & * & * \\ 0 & & & * \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots$$

in Schritt k

Givens-Rotation von rechts eliminiert Eintrag $(k,k+1)$ und erzeugt den Eintrag $(k+1,k)$

— " — von links — " — $(k+1,k)$ — " — $(k,k+2)$

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ in Bidiagonalgestalt. Dann konvergiert die QR-Iteration nach dem chasing-Verfahren gegen Σ mit $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.