Jonas Kipfstuhl
Proseminar „Von Krylov zu Google“

# Globale Konvergenz der QR-Iteration ohne Shift

## 1 Wiederholung

### 1.1 Schur’sche Normalform

Sei $(\lambda, x)$ ein Normiertes Eigenpaar von $A$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $Q = (x|U)$ mit unitärem $Q$.

$$Q'AQ = \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline U' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda x & AU \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & x'AU \\ \hline & U'AU \end{array}\right), U'AU = A_\lambda$$

Dann gilt

$$\det(XI - A) = (X - \lambda)\det(XI - A_\lambda)$$

Das heißt die deflationiert Matrix $A_\lambda$ hat außer $\lambda$ die gleichen Eigenwerte wie $A$. Wendet man dies rekursiv auf die deflationiert Matrix $A_\lambda$ an erhält man die *Schur’sche Normalform* von A.

$$Q'AQ = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Wobei $Q$ unitär ist und $T$ eine obere Dreiecksmatrix ist, auf deren Diagonalen die Eigenwerte von $A$ ihrer Häufigkeit entsprechend stehen.

### 1.2 QR-Iteration

Sei nun $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und die Eigenwerte wie folgt numeriert $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_m|$, sie sind also insbesondere paarweise verschieden.

Dann konstuiert man mittels der QR-Zerlegung eine Folge

$$A_k = Q_k R_k \qquad A_{k+1} = R_k Q_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

wobei $A_0 = A$. Es gibt eine Folge $\Sigma_k$ unitärer Diagonalmatrizen, so dass für $k \to \infty$

$$\Sigma_k' A_k \Sigma_k \to T \qquad Q_0 \cdots Q_{k-1}\Sigma_k \to Q$$

gilt. Dabei ist

$$T = Q'AQ = \begin{pmatrix} \lambda_{\pi(1)} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_{\pi(m)} \end{pmatrix}$$

in schur'scher Normalform.

# 2 Beweis der globalen Konvergenz

Die essentielle Idee des Beweises ist der Vergleich zweier Darstellungen der eindeutigen normierten QR-Zerlegung von $A^k$. Dabei wird benutzt, dass die unitären und die Dreiecksmatrizen jeweils Gruppen bezüglich der Multiplikation bilden.

## 2.1 Vorbereitungen

Es gibt eine Basis $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus Eigenvektoren, da alle Eigenwerte verschieden sind. Damit gilt

$$Y^{-1}AY = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

Eine Dreieckszerlegung von $Y^{-1}$ mit Spaltenpivotiseirung, bei der jeweils das erste Nichtnullelement als Pivot genommen wird liefert

$$P'_\pi Y^{-1} = LR_*$$

Damit gilt für $l_{pq}$, das $pq$-te Element der Matrix $L$, und $p > q$

$$\pi(p) < \pi(q) \Rightarrow l_{pq} = 0 \tag{P}$$

$L$ wird spaltenweise aufgebaut:

$$P_\tau Y^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_k & r_k \\ \hline b_k & B_k \end{array}\right) \qquad L_k = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline l_k & L_{k+1} \end{array}\right) \qquad R_{*k} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_k & r'_k \\ \hline & B_{k+1} \end{array}\right)$$

wobei gilt

$$P'_k Y_k^{-1} = L_k R_k \qquad\qquad l_k = P'_{k+1}\alpha^{-1} b_k$$

Die Zeilen 2 bis $\pi(q)$ im Vektor $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_k \\ b_k\end{smallmatrix}\right)$ sind 0. Falls $p < \pi(q)$ wird in den folgenden Schritten die 0 in Zeile $p$ höchstens mit einer andren 0 getauscht, da $\pi(p) < \pi(q)$. Falls aber $p > \pi(q)$ gilt, wird der Eintrag in Zeile $p$ mit einer 0 in Zeile $\pi(p)$ getauscht, weil $\pi(p) < \pi(q)$ gilt. Daraus ergibt sich, dass der Vektor $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_q \\ b_q\end{smallmatrix}\right)$ im $q$-ten Schritt in der $p$-ten Zeile eine 0 hat, das heißt $l_{pq} = 0$.

Die Eigenbasis $X = YP_\pi$ erfüllt

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= P'_\pi Y^{-1}AYP_\pi = D = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(m)}) \\ X^{-1} &= P'_\pi Y^{-1} = LR_* \end{aligned}$$

Die unitären Diagonalmatrizen $\Sigma, \Sigma_k, \Sigma_*$ werden so gewählt dass

$$\Sigma_k' = \Sigma_* \Sigma^k \qquad D = \Sigma |D| \qquad \text{Diagonale von } \Sigma_*' R_* \text{ ist pos.}$$

Die normierte QR-Zerlegung von $X = QR$ liefert

$$Q = XR^{-1} \Rightarrow Q'AQ = R(X^{-1}AX)R^{-1} = RDR^{-1}$$

Wegen der gruppeneigenschaft ist dies eine obere Dreiecksmatrix und wegen der normierung von $R$ stehen auf der Diagonalen die Eigenwerte $\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(m)}$

## 2.2 Erste Darstellung der normierten QR-Zerlegung von $A^k$

$$A^k = (XDX^{-1})^k = XD^kX^{-1} = QR(D^kLD^{-k})D^kR_*$$

$D^kLD^{-k}$ ist unipotente untere Dreiecksmatrix, das $pq$ Element erfüllt wegen (P) und der nummerierung der Eigenwerte

$$\left(\frac{\lambda_{\pi(p)}}{\lambda_{\pi(q)}}\right)^k l_{pq} = \begin{cases} \mathcal{O}(\theta^k) \to 0 & \pi(p) > \pi(q) \\ 0 & sonst \end{cases} \qquad \theta = \max_{j>k} \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right| < 1$$

Damit folgt $D^kLD^{-k} \to I$. Außerdem gilt

$$RD^kLD^{-k} = (I + E_k)R \qquad E_k \to 0$$

Dies liefert mit der Stetigkeit der normierten QR-Zerlegung

$$(I + E_k) = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k \qquad \tilde{Q}_k \to I, \tilde{R}_k \to I$$

Damit folgt die erste Darstellung der normierten QR-Zerlegung von $A^k$

$$A^k = (Q\tilde{Q}_k\Sigma_k')(\Sigma_k\tilde{R}_kR\Sigma_k'|D|^k\Sigma_*'R_*) \qquad \tilde{Q}_k, \tilde{R}_k \to I$$

## 2.3 Zweite Darstellung der normierten QR-Zerlegung von $A^k$

Aus der QR-Iteration erhält man folgende Form der QR-Zerlgeung von $A^k$

$$A^k = U_kS_k \qquad U_k = Q_0 \cdots Q_{k-1} \qquad S_k = R_{k-1} \cdots R_0$$

Für $k = 1$ ist dies klar. Der Schritt von $k$ nach $k + 1$ ist

$$A^{k+1} = AA^k = AU_kS_k = U_k(U_k'AU_k)S_k = U_kA_kS_k = U_k(Q_kR_k)S_k = U_{k+1}S_{k+1}$$

## 2.4 Vergleich der beiden Darstellungen

Aufgrund der eindeutigkeit der normierten QR-Zerlegung und $\tilde{Q}_k \to I$ gilt

$$Q\tilde{Q}_k\Sigma_k' = U_k \Rightarrow U_k\Sigma_k = Q\tilde{Q}_k \to Q$$
$$\Sigma_k'A_k\Sigma_k = \Sigma_k'(U_k'AU_k)\Sigma_k = \tilde{Q}_k{}'(Q'AQ)\tilde{Q}_k \to Q'AQ = T$$