Caroline Lasser, Ilja Klebanov 18. Junii 2012

Bitte bis Dienstag, 25.06.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Satz von Cayley-Hamilton)

Sei A die Matrix aus Aufgabe 1 von Blatt 7: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Rechnen Sie an diesem Beispiel explizit den Satz von Cayley-Hamilton nach: $p_A(A) = 0$.

(b) Gibt es ein Polynom q kleineren Grades als p_A, welches A annulliert (d.h. $q(A) = 0$)?

Aufgabe 2 (Stochastische Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Spalten-stochastische Matrix, d.h. $0 \leq a_{ij} \leq 1 \ \forall i, j$ und $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall j$.

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass B und B^T dieselben Eigenwerte haben.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass A den Eigenwert 1 hat.

(c) Beweisen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von A gilt: $|\lambda| \leq 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass aus $Av = w$ die Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} |w_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ folgt.

Aufgabe 3 (Nilpotente Matrizen)

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$.

Berechnen Sie die Potenzen von A und zeigen Sie, dass A nilpotent ist (d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$)

(b) Ist jede obere Dreiecksmatrix mit Null-Diagonale nilpotent (mit Begründung oder Gegenbeispiel)?

Aufgabe 4 (Selbstadjungierte Endomorphismen)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $F : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus (d.h. $\langle x, Fy\rangle = \langle Fx, y\rangle \ \forall x, y \in V$).

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von F reell sind.

(b) Beweisen Sie, dass Eigenvektoren v_1, v_2 zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ senkrecht aufeinander stehen: $v_1 \perp v_2$.