Caroline Lasser, Ilja Klebanov 11. Junii 2012

Bitte bis Dienstag, 18.06.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Eigenwerte)

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und ihre geometrische und algebraische Vielfachheit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

in Abhängigkeit der reellen Parameter a, b.

Aufgabe 2 (Diagonalisierung, Eigenwerte, Charakteristisches Polynom)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Erklären Sie (jeweils mit Beweis oder Begründung) den Zusammenhang zwischen

(a) den Eigenwerten/-vektoren von F und der Diagonalisierbarkeit der darstellenden Matrix von F,

(b) den Eigenwerten von F und dem charakteristischen Polynom von F.

Aufgabe 3 (Endomorphismen in Polynome einsetzen)

Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und $v \in V$ ein Eigenvektor von F zum Eigenwert λ.

(a) Wie lässt sich auf sinnvolle Weise eine Abbildung $F^n : V \to V$ ($n \in \mathbb{N}$) definieren. Wie lässt sich allgemein $p(F) : V \to V$ definieren, wobei $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in K[t]$ ein beliebiges Polynom ist. Handelt es sich bei F^n und $p(F)$ wieder um Endomorphismen?

(b) Ist v wieder ein Eigenvektor von $p(F)$ und, wenn ja, zu welchem Eigenwert?

Aufgabe 4 (Stabiler Kern)

Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Beweisen Sie, dass $\ker F^n \subseteq \ker F^m$ für $n \leq m$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass, falls V endlich-dimensional ist, eine natürliche Zahl k_0 existiert, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt:
$$\ker(F^k) = \ker(F^{k_0}).$$

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage von Teil (b) für unendlich-dimensionale Vektorräume falsch ist.