Caroline Lasser, Ilja Klebanov 14. Mai 2012

Bitte bis Dienstag, 21.05.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$. $\mathcal{A}$ kann über das folgende rekursiv definierte Verfahren zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ "orthonormalisiert" werden:

(i) $b'_{j+1} = a_{j+1} - P_{U_j}(a_{j+1})$, wobei $U_j = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_j)$.

(ii) $b_{j+1} = \frac{1}{\|b'_{j+1}\|} b'_{j+1}$.

Beweisen Sie:

(a) b'_{j+1} steht tatsächlich senkrecht auf $b_1, \dots, b_j$ und ist nicht der Nullvektor (sodass (ii) zulässig ist).

(b) Für alle $j = 1, \dots, n$ gilt: $\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_j\} = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_j\}$,

Aufgabe 2 (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

(a) Formulieren Sie das Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren für 3-dimensionale Vektorräume mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ausschließlich über Summen, Produkte und Skalarprodukte.

(b) Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um folgende Basen zu orthonormalisieren:

(i) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt).

(ii) $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}$ in $\mathbb{P}_2$ mit Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Welche Polynome entstehen bei (ii)?

Aufgabe 3 (Der euklidische Vektorraum ℓ^2)
Wir definieren folgenden euklidischen Vektorraum reeller Folgen:

$$\ell^2 = \left\{ (x_0, x_1, \dots) \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R}\ \forall k,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty \right\} \quad , \quad \langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$$

(die Addition und skalare Multiplikation sind komponentenweise definiert).

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $2|a||b| \le a^2 + b^2\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ und folgern Sie daraus die Wohldefiniertheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, indem Sie $|\langle x, y\rangle| < \infty$ für alle $x, y \in \ell^2$ zeigen.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 definiert.

Aufgabe 4 ($(U^\perp)^\perp \overset{?}{=} U$)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und U ein Unterraum von V.

(i) Beweisen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt, falls V endlich-dimensional ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $U = \left\{ (x_0, x_1, \dots) \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R}\ \forall k,\ x_k \neq 0 \text{ nur für endlich viele } k \in \mathbb{N} \right\}$ ein Unterraum von ℓ^2 ist.

(iii) Berechnen Sie $(U^\perp)^\perp$ für dieses Beispiel.