Caroline Lasser, Ilja Klebanov 30. April 2012

Bitte bis Dienstag, 07.05.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Parallelogramm-Gleichung)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die dadurch induzierte Norm (vgl. Blatt 1, Aufgabe 2). Wir wollen die sog. Parallelogramm-Gleichung beweisen:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in V.$$

(a) Fertigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ eine Skizze an, in der Sie $x, y, x+y, x-y$ einzeichnen, und begründen Sie, warum man diese Gleichung Parallelogramm-Gleichung nennt.

(b) Formulieren Sie obige Behauptung für $V = \mathbb{R}^2$ als Schulaufgabe und lösen Sie diese unter Benutzung elementarer Geometrie (benutzen Sie z.B. den Satz des Pythagoras und die Schuldefinition von Sinus und Kosinus).

(c) Beweisen Sie obige Behauptung allgemein.

Aufgabe 2 (Höldersche Ungleichung)

(a) Begründen Sie, warum die Ungleichung

$$a^r b^{1-r} \leq ra + (1-r)b \quad \forall a, b \geq 0 \; \forall 0 < r < 1$$

als "gewichtete Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel" bezeichnet wird und beweisen Sie diese graphisch, indem Sie auf beiden Seiten logarithmieren und in einem Koordinatensystem die Logarithmus-Funktion, die linke und die rechte Seite der Ungleichung einzeichnen.
Welche Eigenschaft der Logarithmus-Funktion wird hier ausgenutzt?

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass daraus die sog. Höldersche Ungleichung folgt:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \;\; \forall p, q > 1 \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tip: Dividieren Sie die linke Seite durch die rechte und setzen Sie $r = \frac{1}{p}$, $1 - r = \frac{1}{q}$.

Aufgabe 3 (Minkowski-Ungleichung und p-Normen)

Auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$.
Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 (b) die sogenannte Minkowski-Ungleichung:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Tip: Zeigen Sie die äquivalente Formulierung $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$.
Bemerkung: Die Minkowski-Ungleichung ist die Dreiecksungleichung für die p-Norm. Zusammen mit den in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften ist sie somit tatsächlich eine Norm.

Aufgabe 4 (Einheitskreise für p-Normen)

Für eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V ist der Einheitskreis definiert als die Menge der Vektoren mit Norm 1: $C = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$.
Skizzieren Sie die Einheitskreise der p-Norm auf $\mathbb{R}^2$ (vgl. Aufgabe 3) für $p = 1, 2, 3, \infty$.