

Bitte bis Dienstag, 02.07.2013, 12:00 Uhr, abgeben. Diejenigen, die am Montag und Dienstag nicht nach Garching kommen, können auch bis Mittwoch, 10:00 Uhr, abgeben.

Aufgabe 1 (Adjungierte Homomorphismen)

- (a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung. Wie sieht der zu F adjungierte Homomorphismus aus (mit Beweis)? (\mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 seien jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen.)
- (b) Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $G : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus, der nilpotent ist (d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $G^n = 0$). Zeigen Sie, dass $G = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (Determinanten)

Seien $A, B, C, D \in K^{n \times n}$. Wir betrachten die Blockmatrix $X := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{2n \times 2n}$.

- (a) Zeigen Sie, dass im Falle $C = 0$ gilt: $\det(X) = \det(A) \det(D)$.
- (b) Zeigen Sie, dass im Falle $AC = CA$ und $A \in GL(n, K)$ gilt: $\det(X) = \det(AD - CB)$.
Hinweis: Multiplizieren Sie X mit einer geeigneten Matrix und benutzen Sie (a).

Aufgabe 3 (Singularwertzerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$A = UDV^T \quad (*)$$

eine Singularwertzerlegung von A (d.h. U und V sind orthogonal und D diagonal). Ferner mögen u_i, v_i die Spalten von U bzw. V und d_i die Diagonaleinträge von D bezeichnen. Folgern Sie direkt aus (*):

- (a) $Av_i = d_i u_i$ für $i = 1, \dots, n$.
- (b) v_i sind Eigenvektoren von $A^T A$. Was sind die zugehörigen Eigenwerte?

Aufgabe 4 (Approximation von Eigenvektoren)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und es gelte $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ für alle $j > 1$. Zeigen Sie, dass für "fast alle" Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ die Folge $x_k = \frac{1}{\lambda_1^k} A^k x$ gegen einen Eigenvektor y zum Eigenwert λ_1 konvergiert (d.h. die Norm der Differenzen $\|x_k - y\|$ konvergiert gegen 0). Präzisieren Sie die Formulierung "fast alle".