Caroline Lasser, Ilja Klebanov 10. Dezember 2013

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Di 10-12 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Kreuzprodukt von Vektorräumen)

Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume.

(a) Wie lässt sich auf natürliche Art und Weise eine Vektorraumstruktur auf $V \times W$ definieren (wie immer mit Beweis, dass tatsächlich ein Vektorraum entsteht).

(b) Welche Dimension hat $V \times W$.

Aufgabe 2 (Direkte Summe)

Seien $U_1, \dots, U_r$ Unterräume des Vektorraums V und $U = U_1 + \dots + U_r$. Beweisen oder widerlegen Sie:
U ist genau dann direkte Summe der U_i, wenn für alle $i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j$ gilt: $U_i \cap U_j = 0$.

Aufgabe 3 (Direkter Summand)

Beweisen Sie: Ist U ein Unterraum des endlichdimensionalen Vektorraums V, so gibt es einen Unterraum U' von V, sodass

$$V = U \oplus U'.$$

U' heißt direkter Summand von V zu U.

Aufgabe 4 (Quotientenräume)

Veranschaulichen Sie die Wohldefiniertheit von Addition und skalarer Multiplikation in V/U anhand des Beispiels einer Ursprungsgeraden U als Unterraum von $V = \mathbb{R}^2$.