Caroline Lasser, Ilja Klebanov 3. Dezember 2013

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Di 10-12 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit von Polynomen und Funktionen)

Beweisen Sie:

(a) $\{\sin(2^n x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Die Lagrange-Polynome $\ell_j,\ j = 0, \ldots, n$ von Blatt 5, Aufgabe 4 sind linear unabhängig in $K[t]$.

Aufgabe 2 (Basen finden)

Geben Sie für folgende Vektorräume eine Basis an (wie immer mit Beweis):

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$,

(b) $\mathrm{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subseteq K[t]$,

(c) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \neq 0$ für endlich viele $x \in \mathbb{R}\}$. Skizzieren Sie zunächst ein "typisches" Element des Vektorraums.

Aufgabe 3 (Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}[t]_{\leq n} := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(f) \leq n\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ stets ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$ ist.

(b) Seien $p_0, \ldots p_n \in \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ Polynome mit der Eigenschaft $\deg(p_j) = j$ für alle $j = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $(p_0, \ldots, p_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ bildet.
Hinweis: Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten gleich sind.

(c) Bilden die Lagrange-Polynome $\ell_j,\ j = 0, \ldots, n$ von Blatt 5, Aufgabe 4 ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$? (Sie dürfen Aufgabe 1(b) verwenden)

Aufgabe 4 (K^n für endliche Körper)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Wir betrachten den Vektorraum $(\mathbb{Z}_p)^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}_p$.

(a) Skizzieren Sie alle eindimensionalen Unterräume von $(\mathbb{Z}_5)^2$.

(b) Wieviele eindimensionale Unterräume besitzt $(\mathbb{Z}_p)^n$ allgemein?