Caroline Lasser, Ilja Klebanov 26. November 2013

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Di 10-12 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Vektorraum von Abbildungen)

Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum und $Abb(X, V) := \{f : X \to V\}$ die Menge der Abbildungen von X nach V.

(a) Wir definieren die folgende Addition und skalare Multiplikation auf $Abb(X, V)$:
Für $f, g \in Abb(X, V)$ und $\lambda \in K$ seien $f \oplus g$ und $\lambda \odot f$ definiert über

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x) \ \forall x \in X, \qquad (\lambda \odot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \ \forall x \in X.$$

Zeigen Sie, dass $(Abb(X, V), \oplus, \odot)$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei U ein Unterraum von V. Ist $\{f : X \to V \mid f(x) \in U \ \forall x \in X\}$ ein Unterraum von $Abb(X, V)$?

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit)

Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $n \geq 2$, paarweise verschieden. Beweisen Sie: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist genau dann linear abhängig, wenn $v_j \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien vier linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ aus V gegeben. Sind dann auch die Vektoren

$$w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4), \quad w_3 = v_2 + 3v_4, \quad w_4 = v_3 - v_4$$

linear unabhängig?

Aufgabe 4 (die Ebene)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine 1000-elementige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ an, welche die Eigenschaft hat, dass jede zweielementige Teilmenge von M linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ ist, und skizzieren Sie diese.
Zusatz: Wie groß kann so eine Menge sein?