Caroline Lasser, Ilja Klebanov 19. November 2013

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Di 10-12 Uhr) oben auf ihre Abgabe, damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (komplexe Nullstellen reeller Polynome)

Seien $f \in \mathbb{R}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $f(\lambda) = 0$.

(a) Finden Sie ein Beispiel für f und λ.

Zeigen Sie:

(b) $f(\bar{\lambda}) = 0$.

(c) $g(t) := (t - \lambda)(t - \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}[t]$.

(d) Es gibt genau ein $q \in \mathbb{R}[t]$ mit $f = qg$.

Aufgabe 2 (Unterräume)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_4$ und beweisen oder widerlegen Sie für jede dieser Mengen, ob sie einen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet:

(a) $U_1 = \{0\}$

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

(c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

(d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$

Aufgabe 3 (Schnitte von Vektorräumen)

Sei V ein Vektorraum mit Unterräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie, dass der Schnitt $U_1 \cap U_2$ wieder ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 4 (Vereinigungen von Unterräumen)

Sei V ein Vektorraum, $U, U' \subseteq V$ Unterräume von V. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $U \cup U'$ ist ein Unterraum von V.

(b) Ist $U \cup U'$ ein Unterraum von V, so gilt $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$.