Caroline Lasser, Ilja Klebanov 12. November 2013

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe, damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (Faktorgruppen)

Seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G.

(a) Beweisen Sie, dass auf G die Relation

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; a^{-1}b \in H \quad \text{für } a, b \in G$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Wie sehen die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation aus?

Aufgabe 2 (Polynomdivision)

(a) Was versteht man unter der Polynomdivision zweier Polynome $f, g \in \mathbb{R}[t]$?

(b) Seien $f = 3t^3 + 2t + 1 \in \mathbb{R}[t]$ und $g = t^2 - 4t \in \mathbb{R}[t]$. Bestimmen Sie $q, r \in \mathbb{R}[t]$ mit $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

Aufgabe 3 ($\mathbb{R}^2$ als Körper)

Wir definieren auf der Menge $\mathbb{R}^2$ folgende Addition und Multiplikation ($a_i, b_i \in \mathbb{R}\ \forall i$):

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2\,,\, b_1 + b_2) \quad , \quad (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2\,,\, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Ring ist, und entscheiden Sie, ob es auch ein Körper ist (Sie dürfen dabei den länglichen Beweis der Assoziativität beider Verknüpfungen weglassen).

Aufgabe 4 (Interpolation)

Sei K eine Körper und $x_0, \ldots, x_n \in K$ paarweise verschieden.

(a) Konstruieren Sie $\ell_0, \ldots, \ell_n \in K[t]$ vom Grad $\leq n$ mit $\ell_j(x_k) = \delta_{kj}$ für alle $0 \leq k, j \leq n$.

(b) Seien $y_0, \ldots, y_n \in K$. Konstruieren Sie $f \in K[t]$ mit $deg(f) \leq n$ und $f(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \ldots, n$.

Hinweis: Sie müssen die Polynome nicht zwangsläufig in der Form $a_nt^n + \cdots + a_0$ angeben, sondern können auch Summen oder Produkte von Polynomen benutzen (selbstverständlich muss dann begründet werden, warum es sich um Polynome vom richtigen Grad handelt).