Caroline Lasser, Ilja Klebanov 29. Oktober 2013

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus)

(a) Informieren Sie sich über den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers (ab jetzt ggT) zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ (ohne Abgabe).

(b) Finden Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, sodass sich der ggT von 128 und 38 schreiben lässt als $ggT(128, 38) = 128k + 38l$.

(c) Finden Sie ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $\quad n \equiv 19 \bmod 128 \quad$ und $\quad n \equiv 13 \bmod 38$.

Aufgabe 2 (Die Gruppe $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$)

(a) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, dass in $\mathbb{Z}_p$ jedes Element außer $[0]$ ein multiplikativ Inverses besitzt, d.h.

$$\forall [a] \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\} \; \exists [a] \in \mathbb{Z}_p : \; [a] \cdot [b] = [1].$$

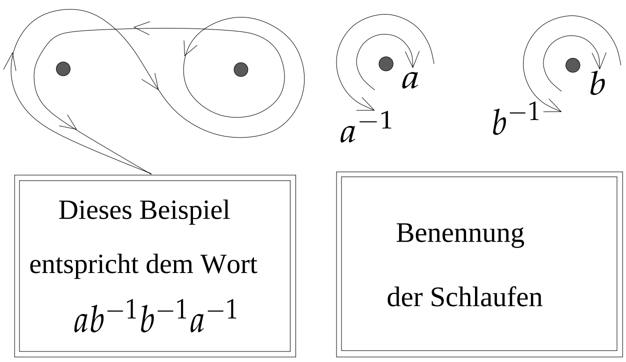
(b) Finden Sie das multiplikativ Inverse von $[78]$ in $\mathbb{Z}_{131}$.

Aufgabe 3 (4-elementige Gruppen)

Geben Sie die Gruppentafeln aller möglichen Gruppen mit 4 Elementen an (wie immer mit Beweis, dass es wirklich Gruppen sind, und dass es keine weiteren mehr gibt!).
Versuchen Sie dabei, sich möglichst viel Arbeit zu sparen, aber trotzdem präzise zu bleiben.

Aufgabe 4 (Bild aufhängen)

Ein Mathematiker möchte ein Bild, an dem eine lange Schlaufe befestigt ist, so an zwei Nägeln aufhängen, dass es herunterfällt, sobald man einen beliebigen Nagel entfernt.
(In dem Beispiel rechts fällt es herunter, wenn man den rechten Nagel herauszieht, nicht aber, wenn man den linken Nagel entfernt.)



(a) Versuchen Sie (nicht länger als 10 Minuten lang) mit Bleistift und Papier eine Lösung für das Problem zu finden .

(b) Wir identifizieren die Menge M aller möglichen Aufhängungen als Menge aller Wörter, die man aus den vier "Buchstaben" a, a^{-1}, b, b^{-1} (vgl. Bild) bilden kann (inklusive dem leeren Wort aus 0 Buchstaben, welches wir mit e bezeichnen), in Formeln

$$M = \left\{ x_1 x_2 \dots x_n \,\middle|\, x_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Als Verknüpfung führen wir ein: $(x_1 x_2 \dots x_n) * (y_1 y_2 \dots y_m) = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$, wobei wir $aa^{-1} = bb^{-1} = a^{-1}a = b^{-1}b = e$ vereinbaren.
Begründen Sie, warum diese Vereinbarung für obiges Problem Sinn macht und warum $(M, \circ)$ eine Gruppe ist. Was ist das inverse Element zu $ab^{-1}b^{-1}a^{-1}$?

(c) Überlegen Sie sich, was es in der neuen Sprache bedeutet, einen Nagel herauszuziehen, und lösen Sie nun das Problem.

(d) Lösen Sie das gleiche Problem für drei bzw. vier Nägel.