

Bitte schreiben Sie vorne auf ihre Abgabe unbedingt den Termin des Tutoriums, welches Sie besuchen werden, hin (beispielsweise Di 10-12 Uhr), damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (Bild und Urbild)

Seien X, Y Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$. Dann heißen

- (i) $f[A] := \{f(x) \mid x \in A\}$ das Bild von A unter f und
- (ii) $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ das Urbild von B unter f .

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen immer wahr sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

- (a) $f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A']$
- (b) $f[A \cap A'] = f[A] \cap f[A']$
- (c) $f^{-1}[B \cup B'] = f^{-1}[B] \cup f^{-1}[B']$
- (d) $f^{-1}[B \cap B'] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[B']$

Aufgabe 2 (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Zeichnen Sie drei Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) f_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- (b) f_2 ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- (c) f_3 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Diskutieren Sie diese Eigenschaften anschaulich an den Graphen.

- (d) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 sollen nun alle die Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^2$ haben, dafür dürfen ihre Definitions- und Wertebereiche frei gewählt werden. Kann man diese so wählen, dass die Funktionen die obigen Eigenschaften erfüllen?

Aufgabe 3 (Die Symmetrische Gruppe S_3)

Sei $X = \{a, b, c\}$ eine 3-elementige Menge und S_3 die Menge aller Bijektionen von X nach X , d.h. $S_3 = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$.

- (a) Man zeige, dass (S_3, \circ) eine Gruppe aus sechs Elementen bildet (die Komposition von Abbildungen wird also als innere Verknüpfung auf G betrachtet).
- (b) Beweisen Sie, dass (S_3, \circ) keine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 4 (Drehungen und Spiegelungen)

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der symmetrischen Gruppe S_3 und allen Spiegelungen und Drehungen eines gleichseitigen Dreieckes, welche das Dreieck auf sich selbst abbilden. Belegen Sie Ihre Argumentation durch Skizzen.