Caroline Lasser, Ilja Klebanov 21. Januar 2014

Aufgabe 1 (Dreiecksmatrizen)

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonaleinträge ungleich Null sind.

(b) Gilt dasselbe für untere Dreiecksmatrizen?

Aufgabe 2 (Ähnliche Matrizen)

$A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ mit $A = SBS^{-1}$ gibt, und man schreibt dann $A \sim B$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$ definiert.

Aufgabe 3 (Darstellende Matrix)

Seien $F : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}, p \mapsto 2p + p'$ (p' bezeichnet die Ableitung von p), $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ und $\mathcal{C} = (1, 1+t, 1+t+t^2)$

(a) Zeigen Sie, dass F linear ist und $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Basen von $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

(b) Finden Sie die darstellenden Matrizen $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ und $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$.

(c) Rechnen Sie die Identität

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id)$$

nach und veranschaulichen Sie in Diagramm, warum sie für beliebige $F : V \to V$ gilt.

Aufgabe 4 (Darstellende Matrix)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Finden Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die durch F **skaliert** werden, d.h. dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$ existiert.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^B_B(F)$ für $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.