Caroline Lasser, Ilja Klebanov 14. Januar 2014

Aufgabe 1 (Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation)
Widerlegen Sie anhand eines Beispiels mit zwei 2×2-Matrizen die Kommutativität der Matrixmultiplikation.

Aufgabe 2 (Drehungen in der Ebene - Teil 1)
Wir ordnen jedem Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ die folgende Matrix und lineare Abbildung zu:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad , \qquad D_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto A_\alpha x$$

(a) Was sind die Bilder der Einheitsvektoren e_1 und e_2 unter D_α? Was passiert mit ihnen anschaulich?

(b) Begründen Sie anschaulich anhand einer Skizze, wieso die Abbildung "$F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x)$ = Drehung des Vektors x um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn" linear ist. Folgern Sie, dass F_α und D_α übereinstimmen.

Aufgabe 3 (Drehungen in der Ebene - Teil 2)
Seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die zu $D_\alpha \circ D_\beta$ gehörige Matrix (Notation wie in Aufgabe 2). Welchen Satz aus der Schule können Sie damit beweisen, wenn Sie die Interpretation von Aufgabe 2(b) verwenden?

Aufgabe 4 (Dualraum)

(a) Welches $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ erfüllt

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 5, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -2\ ?$$

(b) Gibt es ein $f \in (\mathbb{R}^2)^*$, welches

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 1, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 5, \quad f\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 3$$

erfüllt?