

**Aufgabe 1** (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Untersuchen Sie die Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $Bx = b$  für beliebige  $b \in \mathbb{R}^3$  darauf, ob sie universell lösbar sind.

**Aufgabe 2** (Vektorraum der Fixpunkte)

Für eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow V$  definiert  $\text{Fix}(F) := \{x \in V \mid F(x) = x\}$  die Menge der sogenannten Fixpunkte von  $F$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\text{Fix}(F)$  ein Unterraum von  $V$  ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Fix}(F)$  für  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$ .

**Aufgabe 3** (Metall-Legierungen)

Es seien Metall-Legierungen  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M <sub>1</sub>	20	60	20
M <sub>2</sub>	70	10	20
M <sub>3</sub>	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?

**Aufgabe 4** (Vandermonde-Matrix)

Seien  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden. Die sogenannte Vandermonde-Matrix ist gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(a) Formulieren Sie das Gleichungssystem  $V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  als Polynominterpolationsaufgabe.

(b) Gibt es für jede rechte Seite des obigen Gleichungssystems eine Lösung? Wenn es eine Lösung gibt, ist diese eindeutig?